10 Relations binaires

Cahier de calcul : $\varnothing$. **Banque CCINP :** $\varnothing$.

Exercice 1 ●○○○ Soit E l'ensemble des droites du plan.
Quelles sont les propriétés vérifiées par la relation de parallélisme ? d'orthogonalité ?

Relations d'équivalence

Exercice 2 ●●○○ **Construction de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$**

1. On définit une relation $\sim$ sur $\mathbb{N}^2$ en posant, pour tous $(m,n),(m',n') \in \mathbb{N}^2$,

$$(m,n) \sim (m',n') \iff n + m' = n' + m.$$

   a. Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence. Ici on veillera à mener ses calculs uniquement dans $\mathbb{N}$.

   b. Pourquoi est-il naturel de définir $\mathbb{Z}$ comme l'ensemble quotient $\mathbb{N}^2/\sim$?
   (Indication : on pourra s'intéresser à l'application $(m,n) \longmapsto m-n$ de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{Z}$.)

2. On définit une relation $\sim$ sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ en posant, pour tous $(p,q),(p',q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

$$(p,q) \sim (p',q') \iff pq' = p'q.$$

   a. Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence. Ici on veillera à mener ses calculs uniquement dans $\mathbb{Z}$.

   b. Pourquoi est-il naturel de définir $\mathbb{Q}$ comme l'ensemble quotient $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*/\sim$?

Exercice 3 ●●○○ **Relation de congruence**
Soit n un entier naturel non nul. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $\equiv [n]$, dite *de congruence*, en posant, pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$,

$$a \equiv b\,[n] \iff n \mid b-a \quad (\textit{i.e. } n \text{ divise } b-a),$$

autrement dit,

$$a \equiv b\,[n] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad b-a = kn.$$

1. Montrer que $\equiv [n]$ est une relation d'équivalence.
2. Expliciter les différentes classes d'équivalence et préciser le cardinal de l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\equiv [n]$.

Exercice 4 ●○○○ On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ en posant, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x\mathcal{R}y \iff x\,\mathrm{e}^y = y\,\mathrm{e}^x.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer le cardinal de la classe de x.

Exercice 5 ●○○○ Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E.
On définit sur $\mathscr{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ en posant, pour toutes parties X et Y de E,

$$X\mathcal{R}Y \iff A \cap X = A \cap Y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence suivantes : $cl(\varnothing)$, $cl(E)$, $cl(A)$ et $cl(\overline{A})$.
3. Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que $B = A \cap X$ est l'unique élément de $cl(X)$ contenu dans A.
4. **a.** Expliciter $\mathscr{P}(E)/\mathcal{R}$ et $\mathscr{P}(A)$ dans le cas $E = \{1,2,3,4\}$ et $A = \{1,2\}$.
   b. Préciser une bijection de $\mathscr{P}(E)/\mathcal{R}$ sur $\mathscr{P}(A)$ dans le cas particulier de la question précédente, puis dans le cas général.

Exercice 6 ●●●○ Montrer que le nombre R_n des relations d'équivalence sur un ensemble fini de cardinal n vérifie la relation de récurrence

$$R_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} R_k.$$

Relations d'ordre

Exercice 7 ●○○○ **Ordre strict** Soit E un ensemble.
Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est dite *irréflexive* lorsque

$$\forall x \in E, \quad \text{non } (x\mathcal{R}x).$$

On appelle alors *ordre strict sur* E toute relation binaire sur E irréflexive et transitive.

1. Montrer que les relations d'ordre strict sont antisymétriques.
2. Montrer que si $\leqslant$ est une relation d'ordre sur E, alors l'ordre strict associé $<$ est une relation d'ordre strict.
3. Réciproquement, si $<$ une relation d'ordre strict sur E, montrer que la relation binaire $\leqslant$ définie sur E par

$$\forall x,y \in E, \quad x \leqslant y \iff x < y \text{ ou } x = y$$

   est une relation d'ordre sur E.

Exercice 8 ●●○○ — Ordre produit et ordre lexicographique

Soit E un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E.

1. On définit une relation $\preccurlyeq_\times$ sur $E \times E$ en posant, pour tous $(x, y), (x', y') \in E \times E$,

$$(x, y) \preccurlyeq_\times (x', y') \iff x \preccurlyeq x' \text{ et } y \preccurlyeq y'.$$

- **a.** Montrer que $\preccurlyeq_\times$ est une relation d'ordre. On appelle cet ordre l'*ordre produit* sur $E \times E$ (issu de $\preccurlyeq$).
- **b.** Montrer que si E possède au moins deux éléments, $\preccurlyeq_\times$ n'est pas totale.

2. On définit une relation $\preccurlyeq_{\text{lex}}$ sur $E \times E$ en posant, pour tous $(x, y), (x', y') \in E \times E$,

$$(x, y) \preccurlyeq_{\text{lex}} (x', y') \iff x \prec x' \quad \text{ou} \quad (x = x' \text{ et } y \preccurlyeq y').$$

- **a.** Montrer que $\preccurlyeq_{\text{lex}}$ est une relation d'ordre. On appelle cet ordre l'*ordre lexicographique* (pourquoi ?) sur $E \times E$ (issu de $\preccurlyeq$).
- **b.** Montrer que si $\preccurlyeq$ est totale, alors $\preccurlyeq_{\text{lex}}$ l'est aussi.

3. On considère ici $\mathbb{N}$ muni de son ordre usuel $\leqslant$.
Exprimer, pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{N}^2$, $\inf\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ pour l'ordre produit sur $\mathbb{N}^2$.

4. On se place désormais dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et où $\preccurlyeq$ est l'ordre usuel $\leqslant$.
Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, représenter graphiquement l'ensemble des majorants de (x, y) pour $\preccurlyeq_\times$ et $\preccurlyeq_{\text{lex}}$.

Exercice 9 ●○○○ — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On définit une relation $\preccurlyeq_f$ sur $\mathbb{R}$ en posant, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \preccurlyeq_f y \iff f(y) - f(x) \geqslant |y - x|.$$

1. Montrer que $\preccurlyeq_f$ est une relation d'ordre.

2. Montrer que $\preccurlyeq_f$ est totale si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(y) - f(x)| \geqslant |y - x|.$$

3. Quelle est la relation $\preccurlyeq_{\mathrm{Id}_\mathbb{R}}$?

Exercice 10 ●○○○ — Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application injective.

On définit sur E une relation binaire $\preccurlyeq$ par

$$x \preccurlyeq y \iff f(x) \leqslant f(y).$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.

2. Cet ordre est-il total ?

Exercice 11 ●○○○

On définit sur $\mathbb{N}$ une relation $\preccurlyeq$ en posant, pour tous $x, y \in \mathbb{N}$,

$$x \preccurlyeq y \iff \exists n \in \mathbb{N}, \quad y = x^n.$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Cette relation est-elle totale ?

2. Soit $A = \{2, 4, 16\}$. Déterminer le plus grand et le plus petit éléments de A pour cet ordre.

3. Soit $B = \{2, 3\}$. B possède-t-il des majorants ? des minorants ? un plus grand élément ? un plus petit élément ?

4. Soit $D = \{4, 8\}$. Déterminer $\sup D$ et $\inf D$.

Soit E un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E.

Exercice 12 ●●○○

Dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ muni de la relation d'inclusion $\subset$, l'ensemble $\left\{\left[\frac{1}{n}, n\right]\right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ possède-t-il un plus grand élément ? une borne supérieure ?

Exercice 13 ●●○○

On munit $\mathbb{N}$ de la relation $|$ de divisibilité. L'ensemble $\{2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? une borne supérieure ? une borne inférieure ?

Exercice 14 ●○○○

Énoncer et démontrer l'analogue du théorème 28 pour les bornes inférieures.

Indications

Exercice 4. 2. On pourra se ramener à une étude de fonction.

Éléments de réponses

Exercice 1. La relation de parallélisme est une relation d'équivalence. La relation d'orthogonalité est symétrique.

Exercice 4. $|clx| = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ ou } x = 1 \\ 2 & \text{si } 0 < x < 1 \text{ ou } 1 < x. \end{cases}$

Exercice 5. 2. $cl(\varnothing) = cl(\overline{A}) = \mathscr{P}(\overline{A})$, $cl(E) = cl(A) = \{X \in \mathscr{P}(E) \mid A \subset X\}$.

Exercice 11. 1. L'ordre n'est pas total. **2.** $\min A = 2$ et $\max A = 16$. **3.** B possède seulement un majorant, à savoir 1 . **4.** $\sup D = 64$ et $\inf D = 2$.

Exercice 12. Il y a seulement une borne supérieure égale à $]0, +\infty[$.

Exercice 13. Le minimum est 1 et la borne supérieure est 0.