

Programme de colles

semaine 1
du 23 au 27 septembre

Tous les énoncés du cours (définitions et théorèmes) sont exigibles. En revanche, les seules démonstrations exigibles sont celles des résultats mentionnés au paragraphe « Questions de cours ».

Chapitre 1 - Révisions et compléments pour le calcul algébrique

- Résolution d'équations et d'inéquations en présence de valeurs absolues ou de racines carrées.
- Sommes indexées $\sum_{i \in I}$, propriétés usuelles (linéarité, changement d'indice, télescopage), factorisation de $a^n - b^n$.
- Formules pour les sommes de référence ((carrés des, cubes des) entiers consécutifs et progression géométrique).
- Calculs de sommes doubles $\sum_{1 \leq i, j \leq n}$, $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n}$ et $\sum_{1 \leq i < j \leq n}$.
- Produits indexés $\prod_{i \in I}$, notation factorielle, produits doubles.
- Coefficients binomiaux :
 - × définition via la factorielle ;
 - × propriétés élémentaires (formule de symétrie, formule « comité-président », formule/triangle de Pascal, intégralité).
- Formule du binôme.

Chapitre 2 - Logique et raisonnements

- Savoir écrire la négation d'une assertion construite à l'aide des quantificateurs \forall , \exists et des connecteurs ET, OU, NON, \implies et \iff .
- Principaux modes de raisonnement : par la contraposée/l'absurde, disjonction de cas, analyse-synthèse, principes de récurrence.

Chapitre 3 - Ensembles et applications

- Notion d'ensemble (non formalisée), relations d'appartenance et d'inclusion.
- Ensemble des parties d'un ensemble.
- Opérations ensemblistes :
 - × différence de deux ensembles ;
 - × complémentaire ;
 - × union et intersection d'un ensemble d'ensembles (propriétés de distributivité, lois de De Morgan) ;
- Produit cartésien.
- Recouvrement et partition d'un ensemble.
- Généralités sur les applications entre deux ensembles quelconques :
 - × restriction et prolongements d'une application ;
 - × image directe/réciproque d'une partie ;
 - × composition d'applications.
- Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble. Indicatrice du complémentaire, de l'intersection et de l'union.
- Injection, lien avec la composition, lien avec la stricte monotonie pour les fonctions numériques.
- Surjection, lien avec la composition.
- Bijection, lien avec la réciproque, lien avec la composition.

Questions de cours

- Exposer les énoncés relatifs à n'importe quel thème du programme de colle.
- Preuves d'une des formules pour les sommes de référence.
- Preuves des propriétés des coefficients binomiaux.
- Preuve de la formule du binôme.
- Preuve des lois de De Morgan pour les unions/intersections d'ensembles.
- Preuve des liens entre composition et injectivité/surjectivité/bijektivité.
- Calcul de la somme $\sum_{k=0}^n k2^k$.
- Produits $\prod_{k=1}^n 2k$ et $\prod_{k=1}^n (2k+1)$.
- Montrer que toute fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction affine et d'une fonction s'annulant en -1 et 1 .
- Preuves des relations

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j), \quad f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i) \quad \text{et} \quad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i).$$