

Programme de colles

semaine 12
du 5 au 9 janvier

Tous les énoncés du cours (définitions et théorèmes) sont exigibles. En revanche, les seules démonstrations exigibles sont celles des résultats mentionnés au paragraphe « Questions de cours ».

Chapitre 11 - Structures algébriques usuelles

Chapitre 12 - Matrices et systèmes linéaires

Exercices de révision en lien avec ces deux chapitres.

Chapitre 14 - Anneau des polynômes à une indéterminée

- Définition de $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) comme l'ensemble des suites presque nulles.
- Produit de Cauchy de deux suites, structure d'anneau sur $\mathbb{K}[X]$.
- Indéterminée formelle X , notation polynomiale.
- Degré d'un polynôme, coefficient dominant, polynôme unitaire. Degrés d'une somme et d'un produit.
- L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre. Description des éléments inversibles.
- Composition des polynômes, degré d'une composée.
- Dérivation des polynômes :
 - × r^e polynôme dérivé ;
 - × propriétés : degré, linéarité, dérivée du produit, formule de Leibniz, dérivée d'une composée.
- Formule de Taylor.
- Évaluation d'un polynôme, fonction polynomiale associée, polynôme annulateur d'une matrice carrée.

Questions de cours

- Exposer les énoncés relatifs à n'importe quelle notion du programme de colle.

Les preuves des énoncés suivants sont exigibles.

- Degrés d'une somme et d'un produit de polynômes.
- Dérivée du produit de deux polynômes.
- Formule de Taylor pour les polynômes.
- Preuve de la formule de Vandermonde $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ via un raisonnement sur les coefficients de polynômes.
- Degré du polynôme $P(X+1) - P(X)$.
- Existence et unicité d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(\cos(x)) = \cos(nx)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ (on admet à ce stade de l'année qu'un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul).