

# Programme de colles

semaine 12  
du 5 au 9 janvier

Tous les énoncés du cours (définitions et théorèmes) sont exigibles. En revanche, les seules démonstrations exigibles sont celles des résultats mentionnés au paragraphe « Questions de cours ».

## Chapitre 11 - Structures algébriques usuelles

## Chapitre 12 - Matrices et systèmes linéaires

*Exercices de révision en lien avec ces deux chapitres.*

## Chapitre 14 - Anneau des polynômes à une indéterminée

- Définition de  $\mathbb{K}[X]$  ( $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) comme l'ensemble des suites presque nulles.
- Produit de Cauchy de deux suites, structure d'anneau sur  $\mathbb{K}[X]$ .
- Indéterminée formelle  $X$ , notation polynomiale.
- Degré d'un polynôme, coefficient dominant, polynôme unitaire. Degrés d'une somme et d'un produit.
- L'anneau  $\mathbb{K}[X]$  est intègre. Description des éléments inversibles.
- Composition des polynômes, degré d'une composée.
- Dérivation des polynômes :
  - ×  $r^{\text{e}}$  polynôme dérivé ;
  - × propriétés : degré, linéarité, dérivée du produit, formule de Leibniz, dérivée d'une composée.
- Formule de Taylor.
- Évaluation d'un polynôme, fonction polynomiale associée, polynôme annulateur d'une matrice carrée.

## Questions de cours

- Exposer les énoncés relatifs à n'importe quelle notion du programme de colle.

Les preuves des énoncés suivants sont exigibles.

- Degrés d'une somme et d'un produit de polynômes.
- Dérivée du produit de deux polynômes.
- Formule de Taylor pour les polynômes.
- Preuve de la formule de Vandermonde  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$  via un raisonnement sur les coefficients de polynômes.
- Degré du polynôme  $P(X+1) - P(X)$ .
- Existence et unicité d'un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant  $P(\cos(x)) = \cos(nx)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$  (on admet à ce stade de l'année qu'un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul).