

Programme de colles

semaine 11
du 15 au 19 décembre

Tous les énoncés du cours (définitions et théorèmes) sont exigibles. En revanche, les seules démonstrations exigibles sont celles des résultats mentionnés au paragraphe « Questions de cours ».

Chapitre 13 - Arithmétique dans \mathbb{Z}

- Diviseurs, multiples, entiers associés. Propriétés de la relation de divisibilité :
 - × caractérisation des entiers associés ;
 - × relation d'ordre sur \mathbb{N} ;
 - × compatibilité avec les combinaisons linéaires, produits, puissances.
- Relation de congruence modulo un entier, propriétés :
 - × relation d'équivalence sur \mathbb{Z} ;
 - × compatibilité avec les sommes, produits, puissances ;
 - × multiplication/division par un entier non nul.
- Division euclidienne.
- PGCD, PPCM de deux entiers.
 - × Définitions en lien avec l'ordre usuel sur \mathbb{N} ;
 - × Algorithme d'Euclide, les diviseurs communs de deux entiers sont ceux de son PGCD ;
 - × Algorithme d'Euclide étendu, relations de Bézout ;
 - × Propriétés du PGCD (associativité et factorisation par un diviseur commun).
- Extension à une famille finie d'entiers de la notion de PGCD et de ses propriétés.
- Entiers premiers entre eux dans leur ensemble/deux à deux.
 - × Théorème de Bézout, théorème de Gauss, division dans les congruences.
 - × Forme irréductible d'un rationnel.
- Propriétés du PPCM.
- Nombres premiers, lemme d'Euclide, infinité de l'ensemble des nombres premiers.
- Crible d'Ératosthène.
- Valuation p -adique d'un entier non nul :
 - × additivité ;
 - × théorème de décomposition primaire ;
 - × caractérisation de la divisibilité via les valuations p -adiques ;
 - × expressions alternatives du PGCD et du PPCM.
- Petit théorème de Fermat.

Questions de cours

- Exposer les énoncés relatifs à n'importe quelle notion du programme de colle.

Les preuves des énoncés suivants sont exigibles.

- La divisibilité est une relation d'ordre sur \mathbb{N} .
- La relation de congruence modulo un entier est une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} .
- Théorème de division euclidienne.
- Présentation de l'algorithme d'Euclide étendu.
- Expressions alternatives du PGCD et du PPCM via les valuations p -adiques.
- Petit théorème de Fermat.