

L'objectif principal de ce chapitre est l'introduction d'une propriété fondamentale de la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ – dite *propriété de la borne supérieure* – qui distingue statutairement $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$. Ce chapitre nous donnera aussi l'occasion d'introduire brièvement quelques notions de topologie et d'énoncer un ou deux résultats concernant l'approximation des nombres réels.

Dans l'ensemble de ce chapitre, les lettres $A, B, \dots$ désignent des parties de $\mathbb{R}$.

1 Propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

1.1 Majorants/minorants, plus grand/petit élément

Définition-théorème 1 – Majorants/minorants/maximum/minimum d'une partie de $\mathbb{R}$

- Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite *majorée* lorsqu'elle vérifie : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq M$.
Un tel réel M est appelé un *majorant* de A . On dit aussi que A est *majorée par* M ou que M *major*e A .
- On appelle *plus grand élément* de A ou *maximum* de A tout élément de A qui majore A .
Si A possède un plus grand élément, celui-ci est unique. On peut donc l'appeler LE plus grand élément de A et le noter $\max A$.

On définit de façon analogue les notions de partie *minorée*, de *minorant* et de *plus petit élément*, pour lesquelles on dispose de propriétés similaires.

- Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite *bornée* lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée, ce qui équivaut à

$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall a \in A, |a| \leq K.$$

Démonstration. La démonstration de l'équivalence du troisième point est similaire à celle donnée pour les fonctions (cf. théorème 21 du chapitre 4). ■

Exemple 2 L'intervalle $]-\infty, 1]$ est majoré par 1, mais AUSSI par $\sqrt{2}$, $\ln 5$ et e^{30} ... bref par tout élément de $[1, +\infty[$. Il n'est pas minoré en revanche.

Exercice 3 Écrire formellement les assertions « A est non majorée », « A est non minorée » et « A est non bornée ».

✗ ATTENTION ! ✗

- On ne parle jamais « du » majorant d'une partie majorée de $\mathbb{R}$ mais toujours d'UN majorant, dans la mesure où une telle partie n'en possède jamais un seul. En effet, si M est un majorant, alors tout réel supérieur à M en est aussi un. Il en va évidemment de même pour les minorants.
- Le plus grand/petit élément est unique... S'IL EXISTE !

Exemple 4 L'intervalle $[0, 1[$ admet 0 pour plus petit élément, mais n'a pas de plus grand élément.

En effet, $0 \in [0, 1[$ et 0 minore $[0, 1[$, ainsi 0 est le plus petit élément de $[0, 1[$.

Pour établir que $[0, 1[$ n'a pas de plus grand élément, il suffit d'établir qu'aucun élément de $[0, 1[$ ne majore $[0, 1[$. Or, pour tout $x \in [0, 1[$, $x < \frac{x+1}{2}$ et $\frac{x+1}{2} \in [0, 1[$.



Exemple 5 Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- La fonction f est majorée (resp. minorée, bornée) sur A si et seulement si son image $f[A]$ est une partie de $\mathbb{R}$ majorée (resp. minorée, bornée).
- La fonction f admet un maximum sur A si et seulement si son image $f[A]$ est une partie de $\mathbb{R}$ admettant un plus grand élément et, le cas échéant, $\max_A f = \max f[A]$. Idem pour un minimum.

Théorème 6 – Deux propriétés de $\mathbb{N}$

- (i) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
- (ii) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Démonstration. Cf. annexe A. ■

Corollaire 7 – Deux propriétés de $\mathbb{Z}$

- (i) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.
- (ii) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit élément.

Démonstration. Cf. annexe A. ■

1.2 Borne supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

1.2.1 Définitions

Nous avons vu à l'exemple 4 que l'intervalle $[0, 1[$ n'a pas de plus grand élément, toutefois sa borne 1 est quelque chose de cet ordre. En effet, 1 n'est pas un élément de $[0, 1[$ mais est un majorant particulier de cet intervalle au sens où il s'agit du meilleur, l'optimum, en cela qu'il s'agit du plus petit possible, ce qui légitime la définition suivante.

Définition 8 – Borne supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

- Si l'ensemble des majorants de la partie A n'est pas vide et admet un plus petit élément, ce dernier est appelé *la borne supérieure de A* et noté $\sup A$.
Autrement dit, SOUS RÉSERVE D'EXISTENCE, la borne supérieure de A est le plus petit majorant de A .
- Si l'ensemble des minorants de la partie A n'est pas vide et admet un plus grand élément, ce dernier est appelé *la borne inférieure de A* et noté $\inf A$.
Autrement dit, SOUS RÉSERVE D'EXISTENCE, la borne inférieure de A est le plus grand minorant de A .

La différence essentielle entre plus grand élément et borne supérieure réside dans le fait que la borne supérieure, lorsqu'elle existe, n'appartient pas nécessairement à la partie considérée.

Comme l'indique la définition, la borne supérieure n'existe pas toujours, mais le cas échéant elle est unique en tant que plus petit élément ; raison pour laquelle il est légitime de parler de *la* borne supérieure.

Remarque 9 Par définition, une condition nécessaire pour qu'une partie A de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure (resp. inférieure) est qu'elle soit majorée (resp. minorée).

Théorème 10 – Lien entre plus grand/petit élément et borne supérieure/inférieure

Soit a un réel. On dispose des équivalences suivantes

$$(i) \quad a = \max A \iff (a \in A \text{ et } a = \sup A); \quad (ii) \quad a = \min A \iff (a \in A \text{ et } a = \inf A).$$

En particulier, si A possède un plus grand (resp. petit) élément, alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et

$$\sup A = \max A \quad (\text{resp. } \inf A = \min A).$$

Démonstration. Contentons-nous d'établir (i). Supposons que a est le plus grand élément de A . D'une part, a est un majorant de A . D'autre part, $a \in A$ et a est donc plus petit que tout majorant de A . Il s'agit donc de la borne supérieure de A . Réciproquement, supposons que $a = \sup A$ avec $a \in A$. En tant que borne supérieure, a est un majorant de A et donc son plus grand élément. ■

Exemple 11 Non majoré, l'intervalle $\mathbb{R}_+$ ne possède pas de borne supérieure. En revanche, puisque 0 en est le plus petit élément, 0 en est aussi la borne inférieure.

En pratique Démontrer qu'un nombre est la borne supérieure/inférieure.

Pour établir que $s = \sup A$, on raisonne souvent ainsi :

1. On montre que s est un majorant de A .
2. On montre que c'est le plus petit :
 - si $s \in A$, alors $s = \max A$ (théorème 10) et a fortiori $s = \sup A$;
 - si $s \notin A$, on prouve alors par l'absurde qu'il n'existe pas de majorant plus petit (on suppose qu'il en existe un plus petit, disons $t < s$, et on montre qu'il ne s'agit pas d'un majorant en exhibant $x \in A$ tel que $t < x$).

On procède bien sûr similairement pour une borne inférieure.

Ce mode opératoire correspond à la caractérisation suivante de la borne supérieure/inférieure.

Théorème 12 – Caractérisation de la borne supérieure/inférieure

(i) La borne supérieure s d'une partie A de $\mathbb{R}$ est caractérisée par

$$\forall a \in A, \quad a \leq s \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad s - \varepsilon < a.$$

(ii) La borne inférieure s d'une partie A de $\mathbb{R}$ est caractérisée par

$$\forall a \in A, \quad a \geq s \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad s + \varepsilon > a.$$

Démonstration. Pour la borne supérieure, la première relation exprime que s est un majorant de A et la seconde signifie que tout nombre strictement plus petit que s n'est pas un majorant de A . ■

Exemple 13 $[0, 1[$ n'a pas de plus grand élément (exemple 4), toutefois $[0, 1[$ admet 1 pour borne supérieure.

En effet, Rédaction 1. Il est clair que 1 majore $[0, 1[$ et il reste donc à montrer qu'aucun réel strictement inférieur à 1 ne majore $[0, 1[$. Soit $x < 1$ un tel réel.

- Si $x < 0$, puisque $0 \in [0, 1[$, alors x ne majore pas $[0, 1[$.
- Si $x \in [0, 1[$, alors $x < \frac{x+1}{2}$ et pourtant $\frac{x+1}{2} \in [0, 1[$, donc x ne majore pas $[0, 1[$.

Dans tous les cas, x ne majore pas $[0, 1[$.

Rédaction 2. L'ensemble des majorants de $[0, 1[$ est $[1, +\infty[$, or $\min([1, +\infty[) = 1$, ainsi $1 = \sup([0, 1[)$.

Exemple 14 Plus généralement, si a et b sont deux réels tels que $a < b$, alors

$$a = \inf([a, b]) \quad \text{et} \quad b = \sup([a, b]).$$

En effet, procéder comme dans l'exemple précédent.

En pratique Nous établirons au chapitre 15 une caractérisation de la borne supérieure/inférieure très simple d'utilisation en termes de suites (*caractérisation séquentielle*).

Le résultat suivant est d'usage courant en analyse.

Théorème 15

Un réel a qui vérifie l'assertion « $\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon$ » est nul.

Démonstration. Si a est un tel réel, alors $|a|$ est un minorant de $\mathbb{R}_+^*$. Or 0 est la borne inférieure de $\mathbb{R}_+^*$, ainsi $|a| \leq 0$ et on a donc $a = 0$. ■

1.2.2 Propriété de la borne supérieure/inférieure

Le résultat qui suit est une PROPRIÉTÉ CONSTITUTIVE, ET EN CELA ESSENTIELLE, DE L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS. Sa démonstration dépend de la façon dont on construit $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ et ne nous intéresse donc pas, dans la mesure où nous admettons l'existence de l'ensemble des nombres réels. Toutefois, comme vous allez le découvrir durant l'année, en un sens TOUTE L'ANALYSE RÉELLE EST DANS CE THÉORÈME. Directement ou non, nous allons

déduire de cette propriété tous les grands théorèmes d'analyse au programme : théorèmes de la limite monotone (pour les suites et les fonctions), théorème des suites adjacentes, théorème de Bolzano-Weierstrass, théorème des valeurs intermédiaires, théorème des bornes atteintes, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis et théorème de Heine. La construction de l'intégrale de Riemann repose également sur cette propriété.

Le problème qui se pose à nous est le suivant : quelles parties de $\mathbb{R}$ admettent une borne supérieure ? Le cas de l'ensemble vide se traite séparément : $\emptyset$ admet tout réel pour majorant, or $\mathbb{R}$ n'est pas minoré et l'ensemble vide ne possède donc pas de borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Ensuite, si une partie non vide de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure, cette partie est évidemment majorée. Qu'en est-il de la réciproque ? Toute partie non vide et majorée admet-elle une borne supérieure ? La réponse est OUI et en cela le résultat qui suit est optimal.

Théorème 16 – Propriété de la borne supérieure/inférieure

- (i) Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
- (ii) Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

 **En pratique**  La propriété de la borne supérieure est un résultat d'EXISTENCE qui ne donne aucun renseignement explicite sur la valeur de la borne en question. En revanche, cette propriété nous permettra d'établir a priori qu'une borne supérieure existe et ainsi de pouvoir manipuler par la suite cette quantité en toute légitimité.

Exemple 17 Soit a un réel positif. La partie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq a\}$ est non vide ($0 \in A$) et majorée (par $a + 1$ par exemple), par conséquent A admet une borne supérieure s . En raisonnant par l'absurde, on peut montrer que $s^2 = a$, soit $s = \sqrt{a}$. On obtient de cette façon une définition alternative de la notion de racine carrée d'un réel positif.

Remarque 18 La propriété de la borne supérieure est fausse dans $\mathbb{Q}$ et distingue en cela $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$.

Par exemple, la partie non vide et majorée $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ de $\mathbb{Q}$ ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. En effet $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} = \mathbb{Q} \cap]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ et intuitivement cette borne supérieure ne pourrait être que l'irrationnel $\sqrt{2}$, qui n'est justement pas un rationnel. En revanche $\sqrt{2}$ est la borne supérieure de $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 19 – Borne supérieure/inférieure d'une fonction Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On appelle, lorsqu'elle EXISTE, *borne supérieure de f sur A* , notée $\sup f$, la borne supérieure de la partie $f[A]$ de $\mathbb{R}$. Le cas échéant, il s'agit bien sûr du plus petit majorant de f . On définit de même $\inf f$.

En vertu de la propriété de la borne supérieure, une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, avec A non vide, admet une borne supérieure (resp. inférieure) sur A si et seulement si elle est majorée (resp. minorée) sur A .

1.3 Droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Par commodité, il est parfois intéressant de pouvoir considérer les deux infinis $\pm\infty$ comme des éléments ordinaires. Cela permet en particulier d'unifier certains énoncés et certaines démonstrations, typiquement en lien avec la notion de limite, qui sinon nécessiteraient une disjonction de cas.

Définition 20 – Droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$

On appelle *droite réelle achevée*, notée $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ dans lequel les symboles nouveaux $-\infty$ et $+\infty$ sont distincts et régis par les lois suivantes :

- **Prolongement de l'ordre.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$.
L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ est alors totalement ordonné, avec $\max \overline{\mathbb{R}} = +\infty$ et $\min \overline{\mathbb{R}} = -\infty$.
- **Prolongement partiel de l'addition.** $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, $-(+\infty) = -\infty$
et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$ et $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$.
- **Prolongement partiel de la multiplication.** $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$ et, pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$,

$$x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

✗ **ATTENTION ! ✗** Cette définition ne donne aucun sens aux expressions suivantes, qui sont par conséquent proscrites !

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \quad 0 \times (\pm\infty) \quad \text{et} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

On reconnaîtra évidemment ici des formes indéterminées dans les calculs de limites par opérations.

Remarque 21 – Borne supérieure/inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$

Par définition, $+\infty$ et $-\infty$ sont respectivement le plus grand et le plus petit éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

- Une partie de $\mathbb{R}$ non vide et non majorée dans $\mathbb{R}$ admet donc $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ pour unique majorant, et il s'agit donc de sa borne supérieure.
- La partie vide admet tout élément de $\overline{\mathbb{R}}$ pour majorant dans $\overline{\mathbb{R}}$, donc $-\infty$ pour plus petit majorant, et il s'agit ainsi de sa borne supérieure.

Moralité, la propriété de la borne supérieure/inférieure s'énonce plus simplement dans $\overline{\mathbb{R}}$: toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure/inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$, éventuellement égale à $\pm\infty$. On notera que, pour une partie non vide et majorée/minorée de $\mathbb{R}$, les notions de borne supérieure/inférieure dans $\mathbb{R}$ et dans $\overline{\mathbb{R}}$ coïncident.

1.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Rappelons que, par définition, pour tous $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ et on définit de même $]a, b]$ et $]a, b[$. Ces parties de $\overline{\mathbb{R}}$ sont toutes appelées des intervalles.

Définition 22 – Intervalle de $\mathbb{R}$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$, où a et b décrivent $\overline{\mathbb{R}}$.

La caractérisation suivante évite de considérer ces divers cas et offre une définition unifiée de la notion d'intervalle.

Théorème 23 – Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si elle est *convexe*, i.e.

$$\forall x, y \in I, \quad x \leq y \implies [x, y] \subset I.$$

Démonstration. Cf. annexe A. ■

Ainsi un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui, lorsqu'elle contient deux points, contient aussi toutes les « valeurs intermédiaires », autrement dit une partie « sans trou ». On voit ici poindre le TVI pour les fonctions...

2 Notions topologiques pour les parties de $\mathbb{R}$

La topologie est la branche des mathématiques dédiée à la conceptualisation de la notion de « proximité », notion qui permet une généralisation du concept de distance. Ces notions seront abordées de façon plus systématique en deuxième année.

2.1 Voisinages d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$

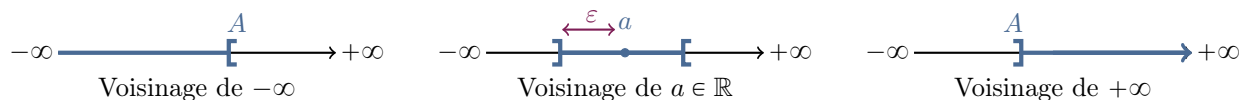
La notion de *voisinage*, qui est exposée en toute généralité en MP, nous permettra notamment de donner une présentation unifiée du concept de limite et d'en faciliter de ce fait sa manipulation, voire sa compréhension. Nous en donnons ici une définition simplifiée.

Définition 24 – Voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On appelle *voisinage de a (dans $\mathbb{R}$)* :

- lorsque $a \in \mathbb{R}$, tout intervalle de la forme $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$;
- lorsque $a = +\infty$, tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$;
- lorsque $a = -\infty$, tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$, avec $A \in \mathbb{R}$.

L'idée est qu'un voisinage de a contient TOUS les réels « à proximité immédiate » de a .



Théorème 25 – Propriétés des voisinages

- (i) Pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a .
- (ii) Deux points distincts de $\overline{\mathbb{R}}$ possèdent des voisinages disjoints.[†] Précisément, pour tous $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ distincts, il existe $\mathcal{V}_a$ et $\mathcal{V}_b$ des voisinages respectifs de a et b tels que $\mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}_b = \emptyset$.

Démonstration. Exercice (distinguer des cas et faire des dessins). ■

La notion de voisinage permet par ailleurs de préciser ce que l'on entend par « *propriétés locales* » en analyse, *i.e.* vérifiée au voisinage d'un point.

Définition 26 – Propriété vraie au voisinage d'un point

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f vérifie une certaine propriété $\mathcal{P}$ *au voisinage de a* lorsque f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ sur $D \cap \mathcal{V}$, pour $\mathcal{V}$ un certain voisinage de a .

Remarque 27

- Une propriété vraie au voisinage d'un point pour $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ne l'est pas forcément sur D tout entier, cela correspond à la distinction entre propriété locale *vs* propriété globale.
- Cette notion de propriété locale a déjà été rencontrée au chapitre 4, en lien avec la notion d'extremum local.

Exemple 28 La fonction sinus est croissante au voisinage de 0, sans être croissante sur $\mathbb{R}$ pour autant. En revanche, la fonction cosinus n'est pas croissante au voisinage de 0.

En effet, la fonction sinus est croissante sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, qui est un voisinage de 0. En revanche, pour tout $\varepsilon \in]0, \pi[$, la fonction cosinus n'est pas croissante sur l'intervalle $[0, \varepsilon[$.

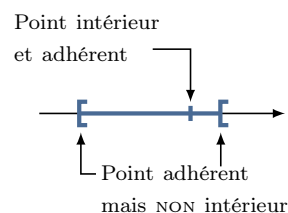
2.2 Points intérieurs, points adhérents, parties denses

Définition 29 – Point intérieur/adhérent à une partie de $\mathbb{R}$

- **Point intérieur.** Un réel x est dit *intérieur* à la partie A lorsque A contient un voisinage de x , *i.e.*

$$\exists \varepsilon > 0, \quad]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A.$$

- **Point adhérent.** Un élément x de $\overline{\mathbb{R}}$ est dit *adhérent* à la partie A lorsque A rencontre tout voisinage de x , *i.e.* pour tout voisinage $\mathcal{V}_x$ de x , on a $\mathcal{V}_x \cap A \neq \emptyset$. On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A , appelé l'*adhérence* de A .



L'idée sous-jacente est que x est intérieur à A lorsqu'il appartient à A sans être « au bord de A », et est adhérent à A lorsqu'il appartient à A ou se trouve au « bord de A ».

Exemple 30

- 1 est adhérent à $[0, 1[$ et $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.
- La droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des points adhérents à $\mathbb{R}$.
- Pour tous $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, $\overline{[a, b]} = [a, b]$.
- Selon la caractérisation donnée au théorème 12, si une partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure), alors $\sup(A)$ (resp. $\inf(A)$) est adhérent à A .

[†]. L'espace $\mathbb{R}$ est dit *séparé* (terminologie hors programme).

Définition-théorème 31 – Partie dense de $\mathbb{R}$

Pour une partie A de $\mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Tout réel est adhérent à A , i.e. $\overline{A} = \mathbb{R}$;
- (ii) A rencontre tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, i.e.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b \implies]a, b[\cap A \neq \emptyset,$$

ce qui revient à dire qu'on peut toujours trouver un élément de A entre deux réels distincts.

- (iii) Pour tout réel x , il existe un élément de A arbitrairement proche de x , i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad |x - a| < \varepsilon.$$

Le cas échéant, on dit que A est *dense dans $\mathbb{R}$* .

Démonstration. (i) $\implies$ (ii) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Par hypothèse, $\frac{a+b}{2}$ est adhérent à A , or $]a, b[$ en est un voisinage, par conséquent $]a, b[\cap A \neq \emptyset$.

(ii) $\implies$ (iii) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. L'intervalle ouvert $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ est non vide, il rencontre donc A , autrement dit il existe $a \in A \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ et en particulier $|x - a| < \varepsilon$.

(iii) $\implies$ (i) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{V}$ un voisinage de x . Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $V =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. Or, par hypothèse, il existe $a \in A$ tel que $|x - a| < \varepsilon$, soit $a \in A \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. ■

Nous établirons au chapitre 15 la caractérisation séquentielle très utile suivante.

Théorème 32 – Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est dense dans $\mathbb{R}$.
- (ii) Tout réel est la limite d'une suite d'éléments de A .

Exemple 33 Nous montrerons (cf. exercice 11.18) que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}^*$, l'ensemble $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$ si et seulement si a/b est un irrationnel.

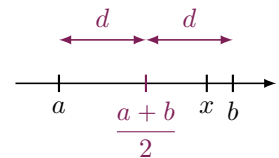
3 Approximation des réels**Définition 34 – Valeur approchée (par défaut/excès)**

Soit a, x et ε trois réels avec $\varepsilon > 0$. On dit que a est une *valeur approchée de x à ε près* lorsque $|x - a| < \varepsilon$. On dit aussi que a est une *valeur approchée de x par défaut (resp. excès) à ε près* lorsque $a \leq x \leq a + \varepsilon$ (resp. $a - \varepsilon \leq x \leq a$).

Théorème 35

Soit $a, b, x, \varepsilon \in \mathbb{R}$ avec $\varepsilon > 0$.

- (i) Si a est une valeur approchée de x par défaut et b une valeur approchée de x par excès, alors $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x à $d = \frac{b-a}{2}$ près.
- (ii) Si a est une valeur approchée de x par défaut à ε près et b une valeur approchée de x par excès à ε près, alors $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x à $\frac{\varepsilon}{2}$ près.



Démonstration. (i) Clair via le dessin.

- (ii) Les hypothèses correspondent à $\begin{cases} a \leq x \leq a + \varepsilon \\ b - \varepsilon \leq x \leq b \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ b - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon \end{cases}$.

Ainsi, d'après le point précédent,

- $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x à $\varepsilon_1 = \frac{b-a}{2}$ près;
- $\frac{a+\varepsilon+b-\varepsilon}{2} = \frac{a+b}{2}$ est aussi une valeur approchée de x à $\varepsilon_2 = \frac{a+\varepsilon-(b-\varepsilon)}{2} = \varepsilon - \frac{b-a}{2}$ près.

Or $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+^*$ imposent $\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \leq \varepsilon/2$. ■

3.1 Partie entière et approximation rationnelle d'un réel

Définition-théorème 36 – Partie entière

Soit x un réel. Il existe un unique ENTIER $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$, appelé la *partie entière de x* et noté $\lfloor x \rfloor$. Cet entier $\lfloor x \rfloor$ est donc le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .

L'essentiel en résumé : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

Démonstration. L'existence de la partie entière, qui peut sembler évidente, découle en pratique de la propriété de la borne supérieure (cf. annexe A). ■

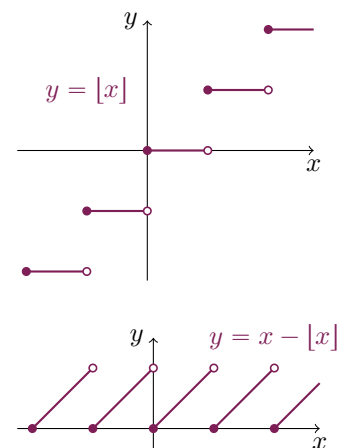
Exemple 37 $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor 7,3 \rfloor = 7$, $\lfloor -8 \rfloor = -8$, MAIS ATTENTION $\lfloor -3,1 \rfloor = -4$ (et non pas -3 !).

Remarque 38 La partie entière d'un réel x correspond à sa valeur approchée par défaut à 1 près.

Théorème 39 – Propriétés de la partie entière

- (i) La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$, constante sur chaque intervalle $[n, n + 1[$, où $n \in \mathbb{Z}$, et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- (ii) Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
- (iii) La fonction *partie décimale* $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique et à valeurs dans $[0, 1[$.
- (iv) La partie entière d'un réel x est entièrement caractérisée par l'une des deux assertions équivalentes suivantes :

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x. \end{cases}$$



Démonstration. ...

En pratique Deux stratégies sont à retenir pour obtenir des résultats en lien avec la partie entière :

- Utiliser l'une des caractérisations du point (iv) du théorème précédent.
- Décomposer un réel x comme la somme de sa partie entière et de sa partie décimale : $x = \lfloor x \rfloor + x - \lfloor x \rfloor$, avec $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$, et avoir à l'esprit le point (ii) du théorème précédent.

Exemple 40 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exemple 41 – Division euclidienne dans $\mathbb{R}$ Soit $\alpha > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier n et un unique réel $y \in [0, \alpha[$ tel que $x = n\alpha + y$, i.e. $x \equiv y [\alpha]$. L'entier n convenable est $n = \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor$.

En effet, soit $n \in \mathbb{Z}$, on dispose alors des équivalences

$$0 \leq x - n\alpha < \alpha \iff n\alpha \leq x < (n+1)\alpha \iff_{\alpha > 0} n \leq \frac{x}{\alpha} < n+1 \iff n = \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor$$

ainsi $\left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor$ est l'unique entier qui convient, et $y = x - \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor \alpha$ est alors l'unique réel de $[0, \alpha[$ qui convient.

Le résultat suivant précise en un sens la répartition des nombres rationnels et irrationnels dans $\mathbb{R}$, en affirmant que ceux-ci se trouvent partout dans $\mathbb{R}$.

Théorème 42 – Densité de l'ensemble des rationnels/irrationnels dans $\mathbb{R}$

Les ensembles $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels sont denses dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. ...

Il y a ainsi toujours un rationnel entre deux irrationnels distincts et un irrationnel entre deux rationnels distincts. En particulier, tout intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point contient au moins un rationnel et un irrationnel. Par ailleurs, tout nombre réel peut être approché aussi près que l'on veut par un rationnel (ou un irrationnel d'ailleurs) et peut être réalisé comme la limite d'une suite de rationnels (ou d'irrationnels).

3.2 Approximation décimale d'un réel

Définition 43 – Nombre décimal

On appelle *nombre décimal* tout réel x pour lequel il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n x$ est entier, i.e. tout réel de la forme $\frac{p}{10^n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombre décimaux.

L'idée sous-jacente est qu'un nombre décimal est un réel dont l'« écriture décimale » n'a qu'un nombre fini de chiffres après la virgule. Par définition, les nombres décimaux sont des rationnels, soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, mais cette inclusion est stricte, e.g. $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Théorème 44 – Approximations décimales d'un réel

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + 10^{-n}.$$

En particulier, les nombres décimaux $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + 10^{-n}$ sont des *valeurs approchées décimales* de x à 10^{-n} près respectivement par défaut et par excès. En particulier, la suite décimale $\left(\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

Démonstration. On a tout simplement, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$. ■

Exemple 45 Posons $x = \sqrt{2}$ et $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Puisque $1 \leq x^2 < 2^2$, on a $1 \leq x < 2$, d'où $a_0 = \lfloor x \rfloor = 1$.
- Puisque $(10x)^2 = 200$, on a $14^2 \leq (10x)^2 < 15^2$, soit $14 \leq 10x < 15$, d'où $a_1 = \frac{14}{10} = 1,4$.
- Puisque $(100x)^2 = 20\,000$, on a $141^2 \leq (100x)^2 < 142^2$, soit $141 \leq 100x < 142$, d'où $a_2 = \frac{141}{100} = 1,41$.

En poursuivant ce processus, on construit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des approximations décimales de $\sqrt{2}$ à 10^{-n} près.

Corollaire 46 – Densité des nombres décimaux

L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$, et donc a fortiori dans $\mathbb{Q}$.

Dans la mesure où $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, ce résultat donne une nouvelle démonstration de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition-théorème 47 – n^e décimale, développement décimal illimité d'un réel

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $d_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor$.

- La suite $(d_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'entiers à valeurs dans $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ et l'entier d_n est appelé n^e *décimale* de x .
- Il existe un entier relatif x_0 et des entiers $a_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tels que

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n} \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} x_0 + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N a_n 10^{-n}.$$

Une telle écriture est appelée un *développement décimal (illimité) du réel x* . En particulier, $x_0 = \lfloor x \rfloor$ et la suite $(a_n)_{n \geq 1} = (d_n)_{n \geq 1}$ conviennent.

Démonstration. ... ■

Remarque 48 La question de l'unicité d'une telle écriture d'un réel x se pose naturellement. Hélas, celle-ci n'est que partielle. Précisément, on peut montrer que

- si x n'est pas un nombre décimal, alors x admet un unique développement décimal illimité ;
- si x est un nombre décimal, alors x admet exactement deux développements décimaux illimités, l'un se terminant uniquement par des 9, l'autre se terminant uniquement par des 0.

Un exemple classique est donné par $1 = 0,99999\dots$, en effet

$$\sum_{n=1}^N \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \times \frac{1 - \frac{1}{10^N}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1.$$

Plus généralement, si $m \in \mathbb{Z}$ et si $d_1, \dots, d_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ avec $d_n \neq 0$, alors les deux développements décimaux illimités suivants coïncident

$$m, d_1 d_2 \dots d_n 0000\dots = m, d_1 d_2 \dots d'_n 9999\dots,$$

où $d'_n = d_n - 1$. Le premier est dit *propre* tandis que le second est qualifié d'*impropre*.

Compétences à acquérir

- Utiliser la notion de borne supérieure/inférieure : exercices 2 à 11.
- Manipuler des expressions contenant des parties entières : exercices 13 et 14.
- Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est dense : exercices 17 et 18.

Quelques résultats classiques :

- Division euclidienne dans $\mathbb{R}$ (exemple 41).
- Une suite décroissante d'entiers naturels est stationnaire (exercice 1).
- Lien entre $\sup(f + g)$ et $\sup f + \sup g$ (exercice 5).
- Un théorème de point fixe pour les fonctions monotones d'un segment dans lui-même (exercice 9).
- Notion de distance à une partie de $\mathbb{R}$ (exercice 10).
- Caractérisation des rationnels via leur développement décimal (exercice 20).

A Annexe

Démonstration du théorème 6

- (i) Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$. Supposons par l'absurde que A ne possède pas de plus petit élément. Nous allons montrer par récurrence que A est minorée par tous les entiers $n \in \mathbb{N}$. Or, puisque A est non vide, A contient au moins un élément a_0 . Ainsi A sera minorée par $a_0 + 1$ et il en découlera que $a_0 + 1 \leq a_0$, ce qui est absurde.
- **Initialisation.** A est minorée par 0, à l'instar de toute partie de $\mathbb{N}$.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons A minorée par n . Puisque, par hypothèse, A ne possède pas de plus petit élément, $n \notin A$ et, par conséquent, pour tout $a \in A$, $a > n$. Mais, étant dans $\mathbb{N}$, ceci équivaut à $a \geq n + 1$, pour tout $a \in A$, et ainsi $n + 1$ minore A .
- (ii) Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$. Par hypothèse, l'ensemble $\mathcal{M}$ des majorants ENTIERs de A est non vide et possède donc un plus petit élément m d'après (i).
- Si $m = 0$, alors, pour tout $a \in A$, $a \leq m = 0$, or $a \in \mathbb{N}$, donc $a = 0$. Puisque A est non vide, $A = \{0\}$ et ainsi A admet 0 pour plus grand élément.
 - Si $m \neq 0$, alors $m - 1 \in \mathbb{N}$. Puisque $m = \min \mathcal{M}$, $m - 1$ ne majore pas A et il existe donc $a \in A$ tel que $m - 1 < a$. Or l'inégalité d'ENTIERs $m - 1 < a \leq m$ implique l'égalité $m = a$ et ainsi $m \in A$. Par définition, m est donc le plus grand élément de A .

Remarque 49 Le point (i) du théorème 6 est ici présenté comme une conséquence du principe de récurrence, ce dernier étant considéré comme un axiome de la définition de l'ensemble des entiers naturels. Remarquons que ces rôles peuvent être inversés, i.e. le point (i) du théorème 6 peut être vu comme une propriété constitutive de $\mathbb{N}$ (un axiome), le principe de récurrence devenant alors un théorème, conséquence de cette propriété.

On procéderait aussi par l'absurde, en considérant pour une propriété $\mathcal{P}$ vérifiant les hypothèses du principe de récurrence (initialisation et hérédité) que le sous-ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{P}(n) \text{ est faux}\}$ de $\mathbb{N}$ est non vide. Cette partie admet donc un plus petit élément n_0 et $n_0 \geq 1$, puisque $0 \in A$ ($\mathcal{P}(0)$ est vrai). Alors $n_0 - 1 \notin A$, i.e. $\mathcal{P}(n_0 - 1)$ est vrai, ce qui implique par hérédité $\mathcal{P}(n_0)$ vrai – contradiction!

Démonstration du corollaire 7

- (i) Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$. Distinguons deux cas :
- Si $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$, alors $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, et $\max(\mathbb{N} \cap \mathbb{Z})$ convient.
 - Sinon $A \subset \mathbb{Z}_-$ et $-A = \{-a \mid a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Alors $-\min(-A)$ convient.
- (ii) Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$. Considérons $\mathcal{M} = \{m \in \mathbb{Z} \mid \forall a \in A, m \leq a\}$ l'ensemble des minorants de A dans $\mathbb{Z}$. Par hypothèse $\mathcal{M}$ est une partie non vide de $\mathbb{Z}$ et elle est aussi majorée (par n'importe quel élément de A !). Montrons alors que $\max \mathcal{M}$ (qui existe d'après (i)) est le plus petit élément de A . Par définition, $\max \mathcal{M} \in \mathcal{M}$ et $\max \mathcal{M}$ est donc un minorant de A . Par ailleurs, puisque $\max \mathcal{M} + 1 > \max \mathcal{M}$, $\max \mathcal{M} + 1$ n'est pas un minorant de A et il existe donc $a \in A$ tel que $\max \mathcal{M} \leq a < \max \mathcal{M} + 1$, ce qui impose $a = \max \mathcal{M}$ (inégalités entre entiers) et ainsi $\max \mathcal{M} \in A$.

Démonstration du théorème 23 Il est clair que tout intervalle de $\mathbb{R}$ en est une partie convexe. Établissons réciproquement que toute partie convexe I de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Si I est vide, c'est un intervalle.
- Sinon, posons $a = \inf I$ et $b = \sup I$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, avec par convention $a = -\infty$ (resp. $b = +\infty$) si I n'est pas minorée (resp. majorée). On a alors par définition, pour tout $x \in I$, $a \leq x \leq b$, soit $I \subset [a, b]$. En outre, considérons $x \in]a, b[$. Par définition de a et b , x n'est ni un minorant, ni un majorant de I . Il existe donc $y, z \in I$ tel que $y < x < z$, ainsi $x \in [y, z] \subset I$, par hypothèse, soit l'inclusion $]a, b[\subset I$. Des deux inclusions précédentes, on déduit que $I \in \{[a, b], [a, b[,]a, b],]a, b]\}$.

Démonstration de la définition-théorème 36 Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **Unicité.** Soit $n, n' \in \mathbb{Z}$ tels que $n \leq x < n + 1$ et $n' \leq x < n' + 1$. Alors

$$\begin{cases} n \leq x < n' + 1 \\ n' \leq x < n + 1 \end{cases} \implies \begin{cases} n - n' < 1 \\ n' - n < 1 \end{cases} \implies |n - n'| < 1 \xrightarrow{n - n' \in \mathbb{Z}} n - n' = 0.$$

- **Existence.** Commençons par établir l'assertion : « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq x$ ».

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par l'absurde, supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n < x$. L'ensemble $\mathbb{N}$ serait alors une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et posséderait donc une borne supérieure s . On aurait alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 \leq s$, puisque $n + 1 \in \mathbb{N}$, et donc $n \leq s - 1$. Ainsi $s - 1$ serait un majorant de $\mathbb{N}$ strictement inférieur à s , ce qui est contradictoire. ■

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après le point précédent, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $x \leq n_1$ et $-x \leq n_2$. L'ensemble $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ est alors une partie non vide de $\mathbb{Z}$ (elle contient $-n_2$) et majorée (par n_1), elle possède donc un plus grand élément N vérifiant $N \leq x$. Par ailleurs, dans la mesure où $N + 1$ n'appartient pas à cet ensemble, on a $x < N + 1$. Ainsi N convient.