

L'étude des équations linéaires sera systématisée au chapitre 22 dans le cadre des espaces vectoriels et en lien avec la notion d'application linéaire.

Dans l'ensemble de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera l'un des ensembles de nombres $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Étant donné une partie D de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}$ et une application $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$, l'équation $y' = f(t, y)$, d'inconnue $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$, est une *équation différentielle du premier ordre* (elle porte sur la dérivée première de l'inconnue y). On appelle *solution* de cette équation différentielle toute fonction $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ telle que

$$\forall t \in I, \quad (t, y(t)) \in D \quad \text{et} \quad y'(t) = f(t, y(t)).$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on appelle *courbes intégrales de l'équation différentielle* les représentations graphiques de ses solutions.

On cherche souvent les solutions d'une équation différentielle $y' = f(t, y)$ vérifiant une *condition initiale* de la forme $y(t_0) = y_0$, avec $(t_0, y_0) \in D$, ce que l'on nomme un *problème de Cauchy*[†]. Graphiquement, cela revient à chercher les courbes intégrales passant par le point (t_0, y_0) .

Conformément au programme, nous limiterons notre étude aux équations différentielles linéaires du premier ordre.

Définition 1 – Équation différentielle linéaire du premier ordre

Soit $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(E) : \quad y' + a(t)y = b(t).$$

- On appelle *solutions sur I* de l'équation différentielle (E) toute fonction $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ telle que

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

- Lorsque b est la fonction nulle, l'équation différentielle (E) est dite *homogène*.
- On appelle *équation homogène (ou équation sans second membre) associée à (E)* l'équation

$$(E_0) : \quad y' + a(t)y = 0.$$

Avec les notations du problème général exposé en introduction, l'équation (E) correspond au cas où $D = I \times \mathbb{K}$ et f est la fonction définie sur D par $(t, y) \longmapsto -a(t)y + b(t)$. Notons que la fonction f est effectivement linéaire en la variable y .

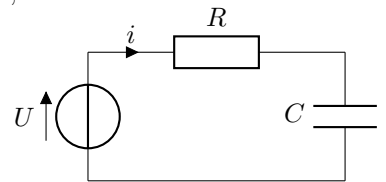
Exemple 2 – Circuit RC : charge d'un condensateur à travers une résistance

Notons i l'intensité du courant dans le circuit ci-contre et q la charge du condensateur,

on a alors $i = \frac{dq}{dt}$. La loi des mailles et la loi d'Ohm conduisent à la relation :

$$U = \frac{q}{C} + Ri = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt},$$

soit une équation différentielle linéaire du premier ordre en q .



[†]. Augustin Louis, baron Cauchy (Paris 1789 – Sceaux 1857) est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Il introduit en analyse les fonctions holomorphes (fonctions de la variable complexe dérivables) et des critères de convergence des suites et des séries entières. Ses travaux sur les permutations sont précurseurs de la théorie des groupes.

1.1 Résolution de l'équation homogène

On s'intéresse dans un premier temps à la résolution des équations homogènes.

Théorème 3 – Solutions de l'équation homogène

Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et A une primitive de a sur I . Les solutions sur l'intervalle I de l'équation différentielle homogène

$$(E_0) : y' + a(t)y = 0$$

sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Démonstration. Soit A une primitive de a sur I et f une fonction dérivable sur I . Il s'agit de prouver que f est solution de (E_0) si et seulement si $t \mapsto f(t)e^{A(t)}$ est constante sur l'intervalle I . Posons alors

$$\forall t \in I, \quad g(t) = f(t)e^{A(t)}.$$

Par opérations, la fonction g est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, \quad g'(t) = [f'(t) + f(t)A'(t)]e^{A(t)} = [f'(t) + f(t)a(t)]e^{A(t)}.$$

Dans la mesure où l'exponentielle ne s'annule pas et que I est un intervalle, on dispose alors des équivalences

$$f \text{ est solution sur } I \text{ de } (E_0) \iff g' = 0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad g = \lambda. \quad \blacksquare$$

Exemple 4 – À connaître par cœur. Lorsque la fonction a est une constante, les solutions sur I de $y' + ay = 0$ sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-at}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.[†]

Corollaire 5

Si f_0 est une solution non nulle de l'équation homogène (E_0) , alors elle ne s'annule pas sur I et l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par $\{\lambda f_0 \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.

1.2 Résolution de l'équation avec second membre

Nous nous intéressons maintenant à la résolution de l'équation avec second membre

$$(E) : y' + a(t)y = b(t),$$

où a et b sont deux fonctions continues sur l'intervalle I . L'équation (E) étant linéaire, pour obtenir ses solutions, il suffit d'en déterminer une solution particulière, connaissant les solutions de l'équation homogène associée (E_0) . Précisément, on dispose du résultat suivant.

Théorème 6 – Solutions de l'équation avec second membre

Soit $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, A une primitive de a sur I et y_{part} une solution particulière sur I de l'équation (E) . Les solutions sur l'intervalle I de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $t \mapsto y_{\text{part}}(t) + \lambda e^{-A(t)}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Démonstration. Soit $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$, on dispose alors des équivalences

$$y' + a(t)y = b(t) \iff y' + a(t)y = y'_{\text{part}} + a(t)y_{\text{part}} \iff (y - y_{\text{part}})' + a(t)(y - y_{\text{part}}) = 0.$$

Ainsi y est une solution de (E) si et seulement si $y - y_{\text{part}}$ est une solution de (E_0) . ■

Reste en pratique à déterminer une solution particulière de (E) , ce qui est l'objet des trois paragraphes suivants.

Utilisation d'une solution évidente Une première stratégie consiste à considérer une éventuelle solution évidente à l'équation différentielle, *e.g.* une solution constante lorsque le second membre b est lui-même constant.

[†]. En physique, lorsque a est un réel strictement positif, le réel $\tau = 1/a$ est appelé *constante de temps*. Il indique en combien de temps la solution est divisée par e . Dans le circuit RC régi par l'équation $R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$, la constante de temps est $\tau = RC$.

Exemple 7 – Circuit RC Lorsque la tension U du circuit RC de l'exemple 2 est constante, la fonction constante égale à CU est une solution particulière (elle correspond à l'état d'équilibre lorsque le condensateur a « fini » de se charger). La solution générale de l'équation différentielle

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U$$

est alors $t \mapsto CU + \lambda e^{-t/RC}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 8 Les solutions sur $]0, \pi[$ de l'équation différentielle $y'(t) \sin t - y(t) \cos t = 1$ sont les fonctions $t \mapsto \lambda \sin t - \cos t$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

En effet, $\sin$ ne s'annule pas sur $]0, \pi[$ et la solution générale sur $]0, \pi[$ de l'équation homogène associée $y' - \frac{\cos t}{\sin t} y = 0$ est

$$t \mapsto \lambda \exp(\ln|\sin t|) = \lambda \sin t,$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et une solution particulière « évidente » de l'équation est $-\cos$.

Méthode de la variation de la constante Lorsque l'on n'entrevoit aucune solution évidente, on peut recourir à la *méthode de la variation de la constante* qui consiste à chercher une solution particulière de l'équation (E) sous la forme $y = \lambda y_H$, où y_H est une solution non nulle de l'équation homogène associée (E_0) et λ une fonction dérivable sur I . Pour tout $t \in I$, on a alors

$$b(t) = y'(t) + a(t)y(t) = \lambda'(t)y_H(t) + \lambda(t) \overbrace{[y_H'(t) + a(t)y_H(t)]}^{=0} = \lambda'(t)y_H(t)$$

soit $\lambda'(t) = \frac{b(t)}{y_H(t)}$, dans la mesure où une solution non nulle y_H de (E_0) ne s'annule pas sur I (théorème 3). Autrement dit, λ est une primitive de la fonction b/y_H sur l'intervalle I . Notons qu'une telle primitive existe toujours, dans la mesure où la fonction b/y_H est continue sur I , par hypothèse sur b .

En pratique

- On pourra retenir que si y_H est une solution non nulle de l'équation homogène associée (E_0) et si λ est une primitive de b/y_H sur I , alors λy_H est une solution particulière de (E) sur I .
- Sur une copie, il est facultatif de rédiger la méthode de la variation de la constante. On peut en effet se contenter de la mettre en œuvre au brouillon et se limiter à écrire sur sa copie « Vérifions que la fonction [...] est solution de l'équation différentielle [...] ».

Exemple 9 Les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation $ty'(t) - y(t) = t^2 e^t$ sont les fonctions $t \mapsto t e^t + \lambda t$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Principe de superposition Autre conséquence de la linéarité, le principe de superposition s'applique aux équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Théorème 10 – Principe de superposition

Soit $a, b_1, b_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Si, pour tout $i \in \{1, 2\}$, y_i est une solution de l'équation $y' + a(t)y = b_i(t)$ sur I , alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution sur I de l'équation $y' + a(t)y = \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$.

Démonstration. Simple vérification. ■

 **En pratique**  Pour déterminer une solution particulière de l'équation $y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$, il suffit d'additionner une solution particulière de chacune des équations $y' + a(t)y = b_1(t)$ et $y' + a(t)y = b_2(t)$. On aura ainsi intérêt à privilégier deux calculs « simples » à un seul calcul « compliqué ».

Exemple 11 La fonction $x \mapsto (x+3)e^x - 2\sin x - 2\cos x$ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' - y = e^x + 4\sin x$ qui vaut 1 en 0.

Problème de Cauchy

Théorème 12 – Existence et unicité de la solution à un problème de Cauchy

Soit $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Le problème différentiel $\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ appelé *problème de Cauchy* avec la *condition initiale* $y(t_0) = y_0$, admet une unique solution sur l'intervalle I , à savoir

$$t \longmapsto y_0 e^{A(t_0)-A(t)} + \int_{t_0}^t b(u) e^{A(u)-A(t)} du,$$

où A est une primitive de a sur I .

Principe de démonstration. Résoudre le problème de Cauchy via la méthode de la variation de la constante. ■

Remarque 13 Ainsi deux solutions de $y' + a(t)y = b(t)$ sont soit confondues, soit ne coïncident en aucun point. En particulier, pour l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$, seule la solution nulle s'annule sur l'intervalle de résolution I (comme nous l'avait déjà appris le théorème 3). Graphiquement, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le théorème précédent signifie que, par tout point du plan dont l'abscisse est dans I , il passe une courbe intégrale et une seule.

1.3 Raccordement de solutions

Les résultats précédents ne s'appliquent pas de façon immédiate aux équations différentielles de la forme

$$(E) : a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

sur un intervalle I où la fonction a s'annule. Étudions cette situation sur quelques exemples.

Exemple 14 Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : ty' - 2y = t^3$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \begin{cases} \lambda t^2 + t^3 & \text{si } t \geq 0 \\ \mu t^2 + t^3 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 15 Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : t^2 y' - y = 0$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \begin{cases} \lambda e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple 16 L'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : (1-t)y' - y = t$ est la fonction $t \longmapsto -\frac{1}{2}(1+t)$.

 **En pratique**  La démarche générale est toujours la même : on résout l'équation différentielle (E) sur des sous-intervalles de I où la fonction a ne s'annule pas, puis on « recolle » ces solutions sur I , en exprimant notamment la continuité des solutions aux points de recollement. On veillera à ne pas oublier de vérifier que les éventuelles solutions obtenues soient bien dérivables sur I !

Exemple 17 – Un exemple d'équation non linéaire Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle non linéaire

$$(E) : y' = |y - t|.$$

2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Étant donné une partie D de $\mathbb{R} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ et une application $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$, l'équation $y'' = f(t, y, y')$, d'inconnue $y \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$, est une *équation différentielle du second ordre* (elle porte sur la dérivée seconde de l'inconnue y). On appelle *solution* de cette équation différentielle toute fonction $y \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$ telle que

$$\forall t \in I, \quad (t, y(t), y'(t)) \in D \quad \text{et} \quad y''(t) = f(t, y(t), y'(t)).$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on appelle courbes intégrales de l'équation différentielle les représentations graphiques de ses solutions.

On cherche à nouveau souvent les solutions d'une équation différentielle $y'' = f(t, y, y')$ vérifiant une *condition initiale* de la forme $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$, avec $(t_0, y_0, y'_0) \in D$, ce que l'on nomme un *problème de Cauchy*.

Conformément au programme, nous limiterons notre étude aux équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

Définition 18 – Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$, avec $a \neq 0$, et $g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$(E) : ay'' + by' + cy = g(t).$$

- On appelle *solutions sur I* de l'équation différentielle (E) toute fonction $y \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$ telle que

$$\forall t \in I, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t).$$

- Lorsque g est la fonction nulle, l'équation différentielle est dite *homogène*.
- On appelle *équation homogène* (ou *équation sans second membre*) associée à (E) l'équation

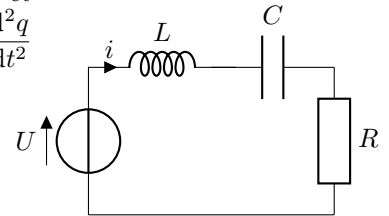
$$(E_0) : ay'' + by' + cy = 0.$$

Exemple 19 – Circuit RLC : charge d'un condensateur avec une résistance et une inductance

On reprend le circuit de l'exemple 2 en plaçant une inductance en série avec la résistance et le condensateur. Dans la mesure où la tension aux bornes de l'inductance est $L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$ la loi des mailles conduit ici à

$$U = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2q}{dt^2},$$

soit une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants en q .



2.1 Résolution de l'équation homogène

On s'intéresse dans un premier temps à la résolution des équations homogènes.

Théorème 20 – Solutions de l'équation homogène

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$, avec $a \neq 0$. La forme des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène

$$(E_0) : ay'' + by' + cy = 0,$$

est dictée par le nombre de racines du polynôme $aX^2 + bX + c$, dit *polynôme caractéristique* de l'équation (E_0) .

- Cas complexe $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.**

Discriminant Δ de $aX^2 + bX + c$	Racine(s) de $aX^2 + bX + c$	Forme des solutions
$\Delta \neq 0$	r et s	$t \mapsto \lambda e^{rt} + \mu e^{st}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
$\Delta = 0$	r	$t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{rt}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

- Cas réel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.**

Discriminant Δ de $aX^2 + bX + c$	Racine(s) de $aX^2 + bX + c$	Forme des solutions
$\Delta > 0$	r et s	$t \mapsto \lambda e^{rt} + \mu e^{st}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	r	$t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{rt}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	$r \pm i\omega$	$t \mapsto e^{rt}(\lambda \sin(\omega t) + \mu \cos(\omega t))$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Démonstration. Cf. annexe A. Une preuve plus systématique sera proposée en exercice au chapitre 23. ■

Remarque 21 Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$, on privilégie parfois d'autres formes équivalentes des solutions, en physique notamment, e.g. $t \mapsto \lambda e^{rt} \sin(\omega t + \varphi)$ ou $t \mapsto \lambda e^{rt} \cos(\omega t + \varphi)$, avec $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}$.

Exemple 22 Les solutions (réelles) de l'équation $y'' + 2y' + 2y = 0$ sont les fonctions $t \mapsto e^{-t}(\lambda \sin t + \mu \cos t)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

En effet, le trinôme $X^2 + 2X + 2$ est de discriminant $\Delta = -4$ et ses racines sont $-1 \pm i$.

Exemple 23 En physique, on rencontre souvent des équations différentielles du type

$$y'' + \frac{\omega_0}{Q} y' + \omega_0^2 y = 0,$$

avec $\omega_0 > 0$ et $Q > 0$. Le comportement des solutions est dicté par le signe du discriminant $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$ du polynôme caractéristique, et donc par le *facteur de qualité* Q . Le régime est dit

- *apériodique* lorsque $Q < 1/2$, i.e. $\Delta > 0$, les solutions sont alors combinaison linéaire de deux exponentielles décroissantes :

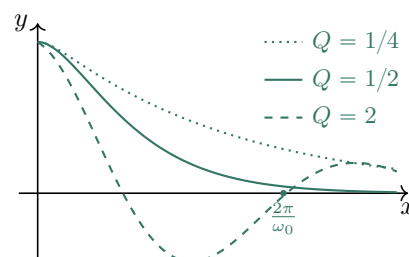
$$t \mapsto \lambda e^{-\omega_0(1+\sqrt{1-4Q^2})t/2Q} + \mu e^{-\omega_0(1-\sqrt{1-4Q^2})t/2Q};$$

- *pseudo-périodique* lorsque $Q > 1/2$, i.e. $\Delta < 0$, les solutions sont alors produit d'une exponentielle décroissante par une fonction trigonométrique :

$$t \mapsto \lambda e^{-\omega_0 t/2Q} \cos\left(\frac{\omega_0 \sqrt{4Q^2 - 1}}{2Q} t + \varphi\right);$$

- *critique* lorsque $Q = 1/2$, i.e. $\Delta = 0$, les solutions sont alors de la forme :

$$t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{-\omega_0 t}.$$



2.2 Résolution de l'équation avec second membre

Nous nous intéressons maintenant à la résolution de l'équation avec second membre

$$(E) : ay'' + by' + cy = g(t),$$

où $a, b, c \in \mathbb{K}$, avec $a \neq 0$, et $g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. La stratégie développée pour les équations différentielles du premier ordre reste valable : en vertu de la linéarité, pour obtenir les solutions de (E) , il suffit d'en déterminer une solution particulière, connaissant les solutions de l'équation homogène associée (E_0) (théorème 20). Précisément, on dispose du résultat suivant.

Théorème 24 – Solutions de l'équation avec second membre

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$, avec $a \neq 0$, $g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et y_{part} une solution particulière sur I de l'équation (E) .

Les solutions sur l'intervalle I de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $t \mapsto y_{\text{part}}(t) + y_{\text{hom}}(t)$, avec y_{hom} une solution quelconque de l'équation homogène associée.

Démonstration. Similaire à celle donnée pour le théorème 6. ■

Reste en pratique à déterminer une solution particulière de (E) , ce qui est l'objet des paragraphes suivants.

Utilisation d'une solution évidente À nouveau, on peut toujours tester si une solution particulière est donnée par une solution constante, notamment lorsque le second membre g est lui-même constant.

Exemple 25 – Circuit RLC Lorsque la tension U du circuit RLC de l'exemple 19 est constante, la fonction constante égale à CU est une solution particulière (elle correspond à un circuit sans courant).

Cas où le second membre g est polynomial
 n , l'équation différentielle

Lorsque le second membre g est une fonction polynomiale de degré

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

admet pour solution particulière une fonction polynomiale de degré

- (i) n si $c \neq 0$; (ii) $n + 1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$; (iii) $n + 2$ si $b = c = 0$.

Cas où le second membre g est de la forme $Ae^{\lambda t}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$

L'équation différentielle $ay'' + by' + cy = Ae^{\lambda t}$ admet une solution particulière de la forme suivante, où $C \in \mathbb{C}$,

- $x \mapsto Ce^{\lambda x}$ si λ n'est pas racine du polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$;
- $x \mapsto Cxe^{\lambda x}$ si λ est racine simple du polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$;
- $x \mapsto Cx^2e^{\lambda x}$ si λ est racine double du polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$.

Cas où le second membre g est de la forme $B e^{\mu t} \cos(\omega t)$ ou $B e^{\mu t} \sin(\omega t)$ avec $(B, \mu, \omega) \in \mathbb{R}^3$ ET $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

On est ramené au cas précédent. En effet, si h est une solution de

$$ay'' + by' + cy = B e^{(\mu+i\omega)t} \quad (1)$$

alors $\operatorname{Re}(h)$ et $\operatorname{Im}(h)$ sont des solutions respectives de

$$ay'' + by' + cy = B e^{\mu t} \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad ay'' + by' + cy = B e^{\mu t} \sin(\omega t).$$

Il suffit en effet de passer à la partie réelle ou imaginaire dans (1).

Principe de superposition

Autre conséquence de la linéarité, le principe de superposition s'applique également aux équations différentielles linéaires d'ordre 2.

Théorème 26 – Principe de superposition

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$, avec $a \neq 0$, $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

Si, pour tout $i \in \{1, 2\}$, y_i est une solution sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = f_i(t)$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$.

Démonstration. Simple vérification. ■

Problème de Cauchy

Théorème 27 – Existence et unicité de la solution à un problème de Cauchy

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$, avec $a \neq 0$, et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

Pour tout $(t_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy $\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y'_0, \end{cases}$ admet une unique solution sur l'intervalle I .

Démonstration. Admis, conformément au programme. Cf. exercice 19 pour l'existence de solutions. ■

Exemple 28 La fonction $t \mapsto \frac{33}{32} \cos x + \sin x - \frac{1}{32} \cos(3x) + \frac{3}{8} x \sin(x)$ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 t$ qui vérifie $y(0) = y'(0) = 1$.

 **En pratique**  La démarche générale à mettre en œuvre pour la résolution d'une équation différentielle linéaire (sous forme normalisée) est similaire pour les premier et second ordres :

- **Étape 1.** On résout l'équation homogène associée ;
- **Étape 2.** On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre, en s'aidant notamment du principe de superposition.
- **Étape 3.** On combine les résultats des deux étapes précédentes pour obtenir l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre.

Démonstrations classiques : Solutions de l'équation homogène (théorème 3) et solution d'un problème de Cauchy (théorème 12) pour une équation différentielle linéaire du premier ordre.

A Annexe

Démonstration du théorème 20.

Pour tout $r \in \mathbb{K}$, on notera $\varphi_r : t \mapsto e^{rt}$.

Lemme 29

Soit $r \in \mathbb{K}$. La fonction φ_r est solution de (E_0) si et seulement si r est racine de $aX^2 + bX + c = 0$.

Démonstration. D'une part la fonction φ_r ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et, d'autre part,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a\varphi_r''(t) + b\varphi_r'(t) + c\varphi_r(t) = (ar^2 + br + c)\varphi_r(t).$$

Ainsi, si r est une racine de $aX^2 + bX + c = 0$, $t \mapsto \lambda e^{rt}$ est une solution de (E_0) , pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. Nous allons alors chercher les solutions de (E_0) sous la forme $t \mapsto z(t)e^{rt}$ (variation de la constante), ce qui n'est pas restrictif, puisque si f est une solution, alors $f(t) = f(t)e^{-rt} \times e^{rt}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Un calcul préliminaire. Soit r une racine de l'équation caractéristique et $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. La fonction $z : t \mapsto e^{-rt} f(t)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = z(t)e^{rt} \quad f'(t) = (z'(t) + rz(t))e^{rt} \quad \text{et} \quad f''(t) = (z''(t) + 2rz'(t) + r^2z(t))e^{rt},$$

ainsi,

$$af''(t) + bf'(t) + cf(t) = [az''(t) + 2arz'(t) + bz'(t) + (ar^2 + br + c)z(t)]e^{rt} = (az''(t) + (2ar + b)z'(t))e^{rt} \quad (*).$$

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\Delta \neq 0$. Notons r et s les deux racines distinctes de $aX^2 + bX + c$. En particulier,

$$r + s = -\frac{b}{a}, \quad \text{soit} \quad b = -ar - as \quad \text{et ainsi} \quad 2ar + b = a(r - s) \neq 0.$$

Soit $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ avec $f : t \mapsto z(t)e^{rt}$. On dispose alors des équivalences

$$\begin{aligned} & f \text{ solution de } (E_0) \\ \iff & \forall t \in \mathbb{R}, \quad (az''(t) + (2ar + b)z'(t))e^{rt} = 0 & (*) \\ \iff & \forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) + (r - s)z'(t) = 0 & (a \neq 0) \\ \iff & \exists \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z'(t) = \alpha e^{(s-r)t} \\ \iff & \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = \alpha \frac{e^{(s-r)t}}{s-r} + \beta \\ \iff & \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = z(t)e^{rt} = \frac{\alpha}{s-r} e^{st} + \beta e^{rt} \\ \iff & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \lambda e^{st} + \mu e^{rt}. \end{aligned}$$

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\Delta = 0$. Notons r la racine double de $aX^2 + bX + c$. Alors $r = -\frac{b}{2a}$ et donc $2ar + b = 0$. Soit $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ avec $f : t \mapsto z(t)e^{rt}$. On dispose alors des équivalences

$$\begin{aligned} & f \text{ solution de } (E_0) \\ \iff & \forall t \in \mathbb{R}, \quad (az''(t) + (2ar + b)z'(t))e^{rt} = 0 & (*) \\ \iff & \forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) = 0 & (a \neq 0) \\ \iff & \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = \alpha t + \beta \\ \iff & \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = z(t)e^{rt} = (\alpha t + \beta)e^{rt}. \end{aligned}$$

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta \geq 0$. On procède comme dans les cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$. Notons $r \pm i\omega$, avec $\omega \neq 0$, les deux racines complexes conjuguées de $aX^2 + bX + c$. Remarquons en outre que toute solution réelle de (E_0) en est aussi une solution complexe. Or, d'après le point précédent, toute solution complexe y de (E_0) est de la forme

$$t \mapsto \alpha e^{rt} e^{i\omega t} + \beta e^{rt} e^{-i\omega t} = e^{rt} (\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}),$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. À quelle condition cette solution est-elle alors réelle? Si elle l'est, en particulier $\text{Im}(y(0)) = \text{Im}(y(\frac{\pi}{2\omega})) = 0$ et on dispose des équivalences

$$\begin{cases} \text{Im}(y(0)) = 0 \\ \text{Im}(y(\frac{\pi}{2\omega})) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \text{Im}(\alpha + \beta) = 0 \\ \text{Im}(i(\alpha - \beta)) = 0 \end{cases} \iff \text{Im } \beta = -\text{Im } \alpha \quad \text{et} \quad \text{Re } \beta = \text{Re } \alpha \iff \beta = \bar{\alpha}.$$

On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y(t) = e^{rt} (\alpha e^{i\omega t} + \bar{\alpha} e^{-i\omega t}) = 2e^{rt} \text{Re}(\alpha e^{i\omega t}) = e^{rt} (2 \text{Re } \alpha \cos(\omega t) - 2 \text{Im } \alpha \sin(\omega t)).$$

Réciproquement, cette fonction est bien réelle.