7 | Primitives et calcul intégral

Ce chapitre vise à renforcer votre pratique du calcul intégral au moyen de révisions ciblées et grâce à une nouveauté : le changement de variable. La construction de l'intégrale d'une fonction continue (par morceaux) sur un segment et l'essentiel des démonstrations des résultats de ce chapitre seront l'objet du chapitre 25.

Dans l'ensemble de ce chapitre, les lettres I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et la lettre $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles de nombres $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Enfin, lorsque l'on considérera le segment $[a\,,b]$, il sera sous-entendu que $a \leqslant b$.

1 Primitives

1.1 Primitives d'une fonction sur un intervalle

Définition 1 – Primitive

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On appelle *primitive de f sur I* toute fonction de I dans $\mathbb{K}$, dérivable sur I et dont la dérivée est égale à f.

Remarque 2 Étant donné la caractérisation de la dérivée d'une fonction à valeurs complexes (théorème 50 du chapitre 4), F est une primitives de f sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(F)$ et $\mathrm{Im}(F)$ sont des primitives respectives de $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exemple 3

- **A connaître par cœur !** Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $x \longmapsto \dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$ est UNE primitive de $x \longmapsto e^{\alpha x}$ sur $\mathbb{R}$.
- Application aux calculs des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \longmapsto e^{ax}\sin(bx)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Théorème 4 – Existence et « unicité » à constante additive près

(i) Toute fonction continue sur un INTERVALLE I admet des primitives sur I.

(ii) Si F est UNE primitive d'une fonction f sur un INTERVALLE I, alors LES primitives de f sur I sont les fonctions $F + \lambda$, λ décrivant $\mathbb{K}$.
En particulier, pour tous $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique primitive de f prenant en x_0 la valeur y_0.

Démonstration. Le point **(i)** est une conséquence directe du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (cf. théorème 16). Pour le point **(ii)**, remarquons qu'une fonction dérivable $G : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f si et seulement si la fonction $G - F$ est de dérivée nulle sur l'intervalle I, *i.e.* si et seulement si elle est contante sur I. ∎

✖ ATTENTION ! ✖ Il n'existe jamais une seule primitive, on ne dit donc jamais « la » primitive mais UNE primitive. Il peut ne pas en exister, mais s'il en existe, il en existe alors une infinité et elles sont toutes égales à constante additive près (sur un intervalle !).

Remarque 5 Le point **(i)** du théorème précédent énonce que la continuité sur un intervalle est une condition SUFFISANTE pour l'existence d'une primitive. Rien n'exclut a priori qu'une fonction discontinue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ puisse admettre des primitives (cf. exercice 7).

1.2 Calculs de primitives

Suite à ces préliminaires théoriques, il s'agit maintenant de calculer en pratique des primitives de fonctions usuelles. Ces calculs reposent d'une part sur la connaissance du tableau des primitives des fonctions usuelles donné à l'annexe A (à connaître PAR CŒUR !) et d'autre part sur le résultat de linéarité suivant

> Si F et G sont des primitives respectives de f et g sur un intervalle I, alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I.

directement issu de la définition d'une primitive et de la linéarité de l'opération de dérivation sur les fonctions. En revanche, contrairement à la somme, les règles de dérivation « alambiquées » pour le produit et le quotient font qu'il N'existe PAS de règle de primitivation pour ces opérations. Il est par conséquent impératif d'apprendre à reconnaître les dérivées de fonctions composées pour lesquelles, rappelons la formule,

$$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u. \tag{1}$$

Autrement dit, $v \circ u$ est une primitive du produit $u' \times v' \circ u$. Ainsi, lorsque l'on cherche à primitiver une expression de la forme $u' \times v' \circ u$, il suffit de déterminer une primitive de v', dans la mesure où u s'impose à nous. Mentionnons quelques cas très courant dans ce contexte :

$u' \,\mathrm{e}^u$ se primitive en e^u, $\dfrac{u'}{u}$ en $\ln|u|$, $u'u^\alpha$ en $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha \neq -1)$, $\dfrac{u'}{1+u^2}$ en $\operatorname{Arctan} u$, $\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ en $\operatorname{Arcsin} u$, etc.
Si F est une primitive de f, alors $x \longmapsto \dfrac{F(ax+b)}{a}$ est une primitive de $x \longmapsto f(ax+b)$, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Exemple 6

- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \dfrac{5x^3}{\sqrt{x^4+1}}$ est $x \longmapsto \dfrac{5}{2}\sqrt{x^4+1}$.
- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{4x^2+1}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}(2x)$.

✎ **En pratique** ✎ **Primitivation des fractions rationnelles $\mathbf{x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}}$.**
La stratégie diffère selon le signe du discriminant Δ du trinôme ax^2+bx+c, où $a,b,c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

- Si $\Delta = 0$, $x \longmapsto \dfrac{1}{a(x-x_0)^2}$ se primitive en $x \longmapsto \dfrac{-1}{a(x-x_0)}$ sur $]-\infty\,, x_0[$ ou $]x_0\,, +\infty[$.
- Si $\Delta > 0$, $x \longmapsto \dfrac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \dfrac{1}{a(x_1-x_2)}\left(\dfrac{1}{x-x_1} - \dfrac{1}{x-x_2}\right)$, avec $x_1 < x_2$, se primitive en $x \longmapsto \dfrac{1}{a(x_1-x_2)}(\ln|x-x_1| - \ln|x-x_2|)$ sur $]-\infty\,, x_1[$, $]x_1\,, x_2[$ ou $]x_2\,, +\infty[$.
- Si $\Delta < 0$, le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et on écrit le trinôme sous forme canonique $a(x+\alpha)^2+\beta$, où $\alpha = \dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a} > 0$. On fait alors apparaître la dérivée de la fonction arctangente pour primitiver sur $\mathbb{R}$. Il est alors utile de savoir que

Pour tout $a > 0$, $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\operatorname{Arctan}\dfrac{x}{a}$ est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 7 La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{3x^2-x+1}$ admet $x \longmapsto \dfrac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{Arctan}\dfrac{6x-1}{\sqrt{11}}$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.

✎ **En pratique** ✎ **Primitivation par linéarisation.** La linéarisation des expressions trigonométriques (produit de sinus et cosinus) permet de les primitiver.

Exemple 8 Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\cos^2$ est $x \longmapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin(2x)}{4}$.

Exemple 9 Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \sin^2 x \cos(4x)$ est $x \longmapsto -\dfrac{1}{24}\sin(6x) + \dfrac{1}{8}\sin(4x) - \dfrac{1}{8}\sin(2x)$

Remarque 10 – Recommandation finale. Puisque primitiver une fonction consiste souvent en l'opération inverse de celle de dérivation, ce qui s'avère moins naturel, il est vivement recommandé lorsque l'on a déterminé une primitive F d'une fonction f de vérifier son calcul en s'assurant que $F' = f$, autrement dit en dérivant la primitive trouvée F, dont la dérivée doit être f.

Remarque 11 Ce paragraphe suggère que la question du calcul explicite des primitives est bien plus complexe que celle pour les dérivées. Mentionnons que l'on peut montrer (au prix d'efforts conséquents !) qu'il est impossible d'écrire au moyen des fonctions usuelles les primitives de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, fonction pourtant relativement simple.

2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Avant d'entrer dans le vif du sujet, donnons un nom aux fonctions dérivables dont la dérivée est continue.

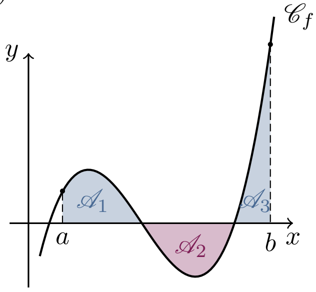
Définition 12 – Fonction de classe $\mathscr{C}^1$

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite *de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I lorsqu'elle est dérivable sur I et lorsque sa dérivée f' est continue sur I. On note $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple 13

- Toute primitive d'une fonction continue est de classe $\mathscr{C}^1$, puisque sa dérivée est justement continue, par définition.
- Les fonctions deux fois dérivables sont de classe $\mathscr{C}^1$. Autrement dit, $\mathscr{D}^2(I, \mathbb{K}) \subset \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$.

2.1 Notion intuitive d'intégrale d'une fonction sur un segment



L'intégrale d'une fonction continue f sur une segment $[a\,,b]$ à valeurs rélles est définie intuitivement comme l'aire ALGÉBRIQUE de la surface délimitée par la courbe de f, ce qui veut dire que les portions de la courbe situées sous l'axe des abscisses contribuent négativement au calcul de l'aire :

$$\int_{[a,b]} f = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3,$$

où $\mathscr{A}_i$ est l'aire de la surface délimitée par la courbe de f et l'axe des abscisses. Il reste toutefois à préciser comment s'obtient une telle aire... (cf. chapitre 25 pour une construction de l'intégrale).

Notation 14 Soit $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$. On note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ le réel $\begin{cases} \displaystyle\int_{[a,b]} f & \text{si } a \leqslant b \\ \displaystyle -\int_{[b,a]} f & \text{si } a > b. \end{cases}$

Définition 15 – Intégrale d'une fonction continue à valeurs complexes

Soit $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{C})$ et $a, b \in I$. On appelle intégrale de f entre a et b le complexe

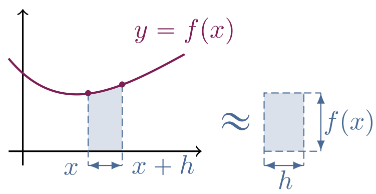
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,\mathrm{d}x + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,\mathrm{d}x.$$

2.2 Lien avec les primitives

Une définition de l'intégrale d'une fonction continue (par morceaux) sur un segment sera donnée au chapitre 25. Nous serons alors en mesure de prouver le théorème suivant, qualifié de « fondamental » dans la mesure où il établit un lien entre des notions apparemment totalement étrangères : celle d'intégrale (liée à un calcul d'aire) et celle de primitive (liée à la dérivation).

Théorème 16 – Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Soit $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$. La fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.



Notons F la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et donnons une idée de la preuve. Sur la figure ci-contre, l'aire algébrique coloriée à gauche vaut

$$\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x+h) - F(x).$$

Or, si h est petit, sachant que f est CONTINUE en x, on peut considérer que f est approximativement égale à $f(x)$ sur tout le segment $[x\,,x+h]$, et on peut donc approcher l'aire colorée à gauche par l'aire du rectangle colorée à droite, qui vaut $hf(x)$. Ainsi,

$$F(x+h) - F(x) \approx hf(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Le résultat suivant, conséquence importante du théorème fondamental, permet de ramener le calcul des intégrales à celui des primitives.

Corollaire 17

Soit $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$. Si F est une primitive de f sur I, alors $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I et F_a l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a (théorème 16). Il existe alors $k \in \mathbb{K}$ tel que $F = F_a + k$ sur I (théorème 4), ainsi

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F_a(b) = F_a(b) - F_a(a) = F_a(b) + k - (F_a(a) + k) = F(b) - F(a).$$

■

Notation 18

- Dans un calcul d'intégrale, on note $[F(x)]_a^b$ (ou $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$) la différence de la fonction F entre a et b. On écrit ainsi, avec les notations du corollaire précédent,
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$
- Lorsque f est une fonction continue, on pourra noter avec une intégrale sans borne inférieure $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ une primitive quelconque de f sur un intervalle. Ainsi, avec les notations du théorème précédent, on a
$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C^{te}.$$

Exemple 19 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = 0$ et $\displaystyle\int_1^{-2} 3x^2\,\mathrm{d}x = \left[x^3\right]_1^{-2} = (-2)^3 - 1^3 = -9.$

Exemple 20 – À retenir ! Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto x^\alpha$ est continue sur $[0, 1]$ et $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\alpha+1}.$

Exemple 21 Déterminons, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x - (a + ib)}$ sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 22

Si $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$, alors, pour tous $a, b \in I$, on a $$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Puisque $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$, il vient $f' \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et f est une primitive de f' sur I. ■

Le théorème fondamental permet aussi de dériver les fonctions définies par une intégrale dépendant de ses bornes.

Exemple 23 La fonction définie par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^4} - \mathrm{e}^{-x^2}$.

✎ En pratique ✎ Face à une fonction de la forme $\varphi : x \longmapsto \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$, avec $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in I^J$, on pensera à écrire φ sous la forme $\varphi(x) = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$, pour $x \in J$, avec F une primitive de f sur I.

2.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue

Théorème 24 – Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue

Soit $f, g \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et $a, b, c \in I$.

(i) Linéarité. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

(ii) Relation de Chasles. $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$

(iii) Inégalité triangulaire. Si $a \leqslant b$, alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

Les propriétés suivantes ne concernent que les fonctions à valeurs RÉELLES !

(iv) Positivité. Si $f \geqslant 0$ et si $a \leqslant b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$

(v) Croissance. Si $f \leqslant g$ et si $a \leqslant b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

(vi) Positivité stricte. Si f est strictement positive, sauf éventuellement en un nombre fini de points, et si $a < b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$

(vii) Nullité avec signe constant. Si f est CONTINUE et de signe CONSTANT sur $[a\,,b]$, avec $a \neq b$, et si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors f est nulle sur $[a\,,b]$.

✖ **ATTENTION !** ✖ Pour toutes les propriétés liant intégrale et inégalité, les bornes a et b de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b$ doivent être ordonnées : $a \leqslant b$.

Remarque 25

- L'opération d'intégration est linéaire à l'instar de celles de dérivation et de primitivation.
- La relation de Chasles concernant les bornes des intégrales est l'analogue de celle pour les extrémités des vecteurs :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

- **(v)** équivaut à **(iv)** par linéarité.
- En supposant f positive, la contraposée de **(vii)** correspond à **(vi)**.

✎ **En pratique** ✎ La relation de Chasles permet notamment de découper les intégrales afin de gérer des questions de signe.

Exemple 26 $\displaystyle\int_{-2}^1 |x|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 |x|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |x|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 -x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{2}.$

✎ **En pratique** ✎ La croissance de l'intégrale permet notamment d'encadrer la valeur d'une intégrale de fonction à valeurs réelles a priori, *i.e.* sans la calculer explicitement, en encadrant la fonction intégrée, et d'établir la monotonie de fonctions à valeurs réelles définies via des intégrales.

Exemple 27 $\displaystyle 3 \leqslant \int_0^3 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 3\,\mathrm{e}^9.$

Exemple 28 La fonction $\displaystyle x \longmapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+xt}\,\mathrm{d}t$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

2.4 Intégration par parties

Ce paragraphe et le suivant introduisent deux autres techniques fondamentales pour le calcul de primitives.

Théorème 29 – Formule d'intégration par parties (IPP)

Soit $u, v \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$. On a alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Cette formule découle essentiellement de la règle de dérivation d'un produit. En effet, puisque u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$, les fonctions $(uv)'$, $u'v$ et uv' sont continues sur I (par opérations) et, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_a^b.$$

■

✎ En pratique ✎ La formule d'intégration par parties est notamment utilisée :

- pour éliminer une fonction « transcendante » dont la dérivée est plus simple, *e.g.* ln, Arcsin, Arctan, etc.
- pour calculer une intégrale par récurrence.

Exemple 30 $\displaystyle\int_0^{1/2} \operatorname{Arcsin} x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$ et $\displaystyle\int_0^1 t^3\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

Remarque 31 Dans un calcul de primitive, la formule d'intégration par parties sur un intervalle s'écrit

$$\int^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = u(x)v(x) - \int^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 32 – Retrouver une primitive de ln. Les fonction $u : t \longmapsto t$ et $v : t \longmapsto \ln t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi, par intégration par parties,

$$\int^x \ln t\,\mathrm{d}t = x\ln x - \int^x t \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = x\ln x - \int^x \mathrm{d}t = x\ln x - x + C^{te}.$$

2.5 Changement de variable

Théorème 33 – Changement de variable

Soit $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathscr{C}^1(J, \mathbb{R})$ telle que $\varphi(J) \subset I$. On a alors, pour tous $a, b \in J$,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Continue, f possède une primitive F de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et, comme φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et à valeurs dans I, la fonction $F \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J, par opérations. Ainsi, en vertu du corollaire 22,

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = [F \circ \varphi(t)]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

La démarche suivante permet de retrouver rapidement, mais sans rigueur, la formule de changement de variable :

- on part de $x = \varphi(t)$ (c'est le changement de variable) ;
- ensuite on « dérive selon t » : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$, ce que l'on réécrit $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$;
- on multiplie ensuite par $f(x) = f(\varphi(t))$: $f(x)\,\mathrm{d}x = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$;
- on intègre enfin : tandis que t varie de a à b, $x = \varphi(t)$ varie de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$.

Remarque 34

- La formule de changement de variable n'est rien d'autre que la formule de dérivation d'une fonction composée lue à l'envers.
- Il n'est pas nécessaire que φ soit strictement monotone sur $[a\,,b]$, mais le cas échéant le changement de variable $x=\varphi(t)$ équivaut à $t=\varphi^{-1}(x)$, puisque φ est alors bijective (théorème de la bijection).
- Dans un calcul de primitive sur un intervalle, la formule de changement de variable s'écrit

$$\int^{x} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\int^{\varphi(x)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

De la droite vers la gauche. On utilise la formule de changement de variable de la droite vers la gauche lorsque l'on reconnait une intégrande de la forme $(f\circ\varphi)\varphi'$.

Exemple 35 $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-1$ via le changement de variable $x=\cos t$.

En effet, pour calculer $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$, on écrit

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t}\sin t\,\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2 t}{1+\cos^2 t}\cos' t\,\mathrm{d}t,$$

ce qui permet d'identifier $\varphi=\cos$ et $f:x\longmapsto\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. Or la fonction cos est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,,\pi/2]$ d'image $[0\,,1]$ et la fonction f est continue sur $[0\,,1]$. Ainsi, le changement de variable $x=\cos t$ dans J mène à

$$J=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2 t}{1+\cos^2 t}\cos' t\,\mathrm{d}t,=-\int_{\cos 0}^{\cos(\pi/2)}\frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=-\int_1^0\left(\frac{2}{1+x^2}-1\right)\mathrm{d}x=-\left[2\,\mathrm{Arctan}\,x-x\right]_1^0=\frac{\pi}{2}-1.$$

De la gauche vers la droite. On utilise le changement de variable de la gauche vers la droite pour en simplifier l'intégrande, typiquement pour faire disparaître un radical.

Exemple 36 $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}=2\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ via le changement de variable $u=\sqrt{x}$.

En effet, le changement de variable $u=\sqrt{x}$ équivaut ici à $x=u^2$, pour lequel : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=2u$, soit $\mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$, puis

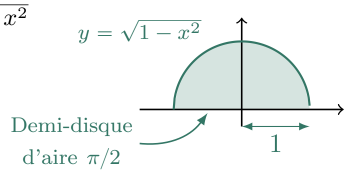
$$\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}=\frac{2u\,\mathrm{d}u}{u^2+u}=\frac{2\,\mathrm{d}u}{u+1}.$$

Puisque $u\longmapsto u^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[1\,,\sqrt{2}\right]$ à valeurs dans $[1\,,2]$ et $x\longmapsto\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$ est continue sur $[1\,,2]$, le changement de variable $x=u^2$ mène alors à

$$\int_{1^2}^{\sqrt{2}^2}\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{2u\,\mathrm{d}u}{u^2+u}=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{2\,\mathrm{d}u}{u+1}=2\left[\ln|1+u|\right]_1^{\sqrt{2}}=2\left(\ln\left|1+\sqrt{2}\right|-\ln|2|\right)=2\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right).$$

Exemple 37 $\displaystyle\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ via le changement de variable $x=\sin\theta$.

En effet, la fonction sin est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\pi/2\,,\pi/2]$ d'image $[-1\,,1]$ et la fonction $x\longmapsto\sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1\,,1]$, ainsi le changement de variable $x=\sin\theta$ mène à :



$$\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\cos\theta|\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\underset{\cos\geqslant 0}{=}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\ldots$$

$$\ldots=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos(2\theta))\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\left(\pi+\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Exemple 38 Déterminons une primitive de $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1\,,1]$ via le changement de variable $x = \sin\theta$.

En effet, on va s'intéresser à l'intégrale $\displaystyle\int^u \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, avec $u \in [-1\,,1]$, où pour faire le changement de variable $x = \sin\theta$, il faudra pouvoir exprimer la nouvelle borne en fonction de u, ce qui exige un changement de variable bijectif. On restreint alors θ à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$, de telle sorte que $\theta = \operatorname{Arcsin} x$. À nouveau, la fonction sin est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\pi/2\,,\pi/2]$ d'image $[-1\,,1]$ et la fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1\,,1]$, ainsi, pour tout $u \in [-1\,,1]$,

$$\int^u \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int^{\operatorname{Arcsin} u} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \underset{\cos\geqslant 0}{=} \int^{\operatorname{Arcsin} u} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int^{\operatorname{Arcsin} u} (1+\cos(2\theta))\,\mathrm{d}\theta \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arcsin} u + \frac{\sin(2\operatorname{Arcsin} u)}{2}\right) + C^{te} = \frac{1}{2}(\operatorname{Arcsin} u + \sin(\operatorname{Arcsin} u)\cos(\operatorname{Arcsin} u)) + C^{te} \ldots$$

$$\ldots \underset{\cos\geqslant 0}{=} \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arcsin} u + u\sqrt{1-\sin^2(\operatorname{Arcsin} u)}\right) + C^{te} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arcsin} u + u\sqrt{1-u^2}\right) + C^{te}$$

Remarque : bien que somme de deux fonctions non dérivables en -1 et 1, la somme $u \longmapsto \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arcsin} u + u\sqrt{1-u^2}\right)$ est dérivable sur $[-1\,,1]$ en tant que primitive sur cet intervalle de la fonction continue $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$.

Changement de variable affine Un changement de variable affine permet souvent, sans aucun calcul d'intégrale, de prouver des propriétés graphiquement évidente. Un tel changement de variable peut être directement mis en œuvre, sans avoir à rappeler les hypothèses de régularité du cas général.

Théorème 39 – Intégrale d'une fonction paire/impaire/périodique

(i) Soit $a \geqslant 0$ et $f \in \mathscr{C}([-a\,,a],\mathbb{K})$.

Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$, et si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

(ii) Si $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ est T-périodique, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration.

(i) Le changement de variable affine $x = -t$ donne

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(-t)\,\mathrm{d}t$$

et le résultat escompté selon la parité de f.

(ii) Le changement de variable affine $x = t + T$ donne

$$\int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(t+T)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ainsi, d'après la relation de Chasles,

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

✎ En pratique ✎

- Le changement de variable affine $u = a + (b-a)v$ permet de transformer une intégrale sur $[a\,,b]$ en une intégrale sur $[0\,,1]$:
$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)v)\,\mathrm{d}v.$$
- Un changement de variable affine peut aussi être mis en œuvre pour faire passer un paramètre dans une intégrale de l'intégrande aux bornes de celle-ci (cf. exemple ci-après).

Exemple 40 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.

La fonction $h : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = \dfrac{f(x)-h(x)}{x}$.

Compétences à acquérir

- Calculs de primitives/d'intégrales :
  - × via les primitives usuelles : exercices 1, 4, 8, 9 et 12 ;
  - × de fractions rationnelles : exercices 2 et 10 ;
  - × par passage à l'exponentielle complexe : exercice 3 ;
  - × par linéarisation d'expressions trigonométriques : exercice 11 ;
  - × par IPP : exercices 18 à 20 ;
  - × par changement de variable : exercices 26 à 29.
- Étude de fonctions définies par une intégrale : exercices 13 à 17.
- Utilisation de l'intégration par partie : exercices 21 à 26.

Quelques résultats classiques :

- Intégrales de Wallis (exercice 23) : il est inutile de connaître les résultats de cet exercice, en revanche ce thème est très classique aux concours.

A Table des primitives usuelles

Le tableau ci-après des primitives usuelles s'obtient essentiellement en lisant « à l'envers » le tableau des dérivées des fonctions usuelles.

	Fonction f	Une primitive	Intervalles maximaux de validité
1	$a \in \mathbb{C}$ (constante)	ax	$\mathbb{R}$
2	$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \\ ]-\infty\,,0[\text{ ou }]0\,,+\infty[& \text{si } \alpha \in \mathbb{Z}_- \\ ]0\,,+\infty[& \text{sinon} \end{cases}$
3	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$]0\,,+\infty[$ ou $]-\infty\,,0[$
4	e^x	e^x	$\mathbb{R}$
5	$\mathrm{e}^{\alpha x} \quad (\alpha \in \mathbb{C}^*)$	$\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha}$	$\mathbb{R}$
6	$\ln x$	$x\ln x - x$	$]0\,,+\infty[$
7	$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
8	$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
9	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}\,,\dfrac{\pi}{2}\right[+ k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$
10	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}\,,\dfrac{\pi}{2}\right[+ k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$
11	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
12	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
13	$\operatorname{th} x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$	$\mathbb{R}$
14	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
15	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$
16	$\dfrac{1}{a^2+x^2} \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{Arctan}\dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
17	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x$	$]-1\,,1[$
18	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$\operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{\lvert a\rvert}$	$]-\lvert a\rvert\,,\lvert a\rvert[$

Remarque 41

- Les intervalles de la ligne 2 sont évidemment liés à l'ensemble de définition de la fonction puissance $x \longmapsto x^\alpha$, qui dépend de la nature de α.
- La valeur absolue présente pour une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ ou de tan, aux lignes 3 et 9, indique qu'il faut être vigilant quant au signe lorsque l'on primitive les fonctions inverse et tangente.