

6 | Nombres complexes

1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1.1 Définition

Définition-théorème 1 – Ensemble des nombres complexes, forme algébrique, parties réelle/imaginaire

- On admet[†] qu'il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, qui contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ et vérifie les propriétés suivantes :
 - $\times$ $\mathbb{C}$ contient un nombre i tel que $i^2 = -1$.
 - Tout élément z de $\mathbb{C}$, appelé *nombre complexe*, s'écrit d'une et une seule manière sous la forme dite *algébrique* $z = a + ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Le réel a est appelé la *partie réelle* de z et noté $\operatorname{Re}(z)$, le réel b est appelé la *partie imaginaire* de z et noté $\operatorname{Im}(z)$.
- Les réels sont exactement les nombres complexes de partie imaginaire nulle. Enfin, un nombre complexe de partie réelle nulle est dit *imaginaire pur*. L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Exemple 2 Pour le nombre complexe $z = 12 - 4i$, $\operatorname{Re}(z) = 12$ et $\operatorname{Im}(z) = -4$.

 **En pratique**  L'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe est utilisée fréquemment pour des identifications. Elle permet, face à une égalité $a + ib = a' + ib'$, d'écrire $a = a'$ et $b = b'$. En résumé :

$$\begin{array}{ccc} \text{UNE égalité} & = & \text{DEUX égalités} \\ \text{de nombres complexes} & & \text{de nombres réels} \end{array}$$

Définition-théorème 3 – Opérations dans $\mathbb{C}$

L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une opération d'addition et d'une opération de multiplication qui généralisent celles que nous connaissons sur $\mathbb{R}$. Précisément, pour tous nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ donnés sous forme algébrique :

$$z + z' = (a + a') + i(b + b') \quad \text{et} \quad zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba'),$$

ce qui signifie que $\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z'), \quad \operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z'),$

$$\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z') - \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z') \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z') + \operatorname{Re}(z')\operatorname{Im}(z).$$

Enfin, pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$

Les opérations dans $\mathbb{C}$ obéissent aux mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$: l'addition et la multiplication sont associatives et commutatives et la multiplication est distributive par rapport à l'addition. En outre, tout nombre complexe non nul est inversible et, de ce fait, on dispose de la propriété classique (*intégrité*) : « $zz' = 0 \implies z = 0$ ou $z' = 0$ ».

✗ ATTENTION ! ✗

$$\begin{array}{l} \text{En général :} \quad \operatorname{Re}(zz') \neq \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z') \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(zz') \neq \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z'). \\ \text{En particulier :} \quad \operatorname{Re}(z^2) \neq \operatorname{Re}(z)^2 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z^2) \neq \operatorname{Im}(z)^2. \end{array}$$

En revanche, $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(az) = a \operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(az) = a \operatorname{Im}(z).$

Exemple 4 L'inverse de i est $-i$. $\frac{1+i}{1-i}$ est un imaginaire pur, puisque $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1^2 + 1^2} = \frac{1+2i-1}{2} = i.$

[†]. Nous reviendrons sur la construction du corps des nombres complexes au chapitre 12.

✗ ATTENTION ! ✗

LES INÉGALITÉS N'ONT AUCUN SENS DANS $\mathbb{C}$.

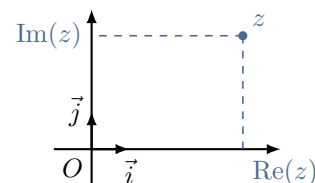
Il s'agit là d'une différence essentielle entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. En outre, pour $z \in \mathbb{C}$, lorsque $z^2 \in \mathbb{R}$, on peut avoir $z^2 < 0$! Par exemple, $i^2 = -1$.

Remarque 5 Il existe des relations d'ordre totales sur $\mathbb{R}^2$, auquel s'identifie « ensemblistement » $\mathbb{C}$, e.g. l'ordre lexicographique (cf. chapitre 10). Toutefois aucune de ces relations d'ordre n'est compatible avec la structure opératoire de $\mathbb{C}$. En effet, pour une telle relation $\succcurlyeq$, tout carré devant être positif, on devrait avoir $i^2 \succcurlyeq 0$ et $1 > 0$, d'où $1 + i^2 > 0$, ce qui est exclu.

Définition 6 – Affixe, image

On munit le plan $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Le point M du plan de coordonnées (x, y) est appelé l'*image* de z tandis que z est appelé l'*affixe* de M . On dit aussi que z est l'*affixe* du vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (x, y) .



• Règles de calcul sur les affixes :

- × Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan d'affixes respectives u et v et pour tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ a pour affixe $\lambda u + \mu v$.
- × Pour tous points A et B du plan d'affixes respectives a et b , le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$.

Au fond, les notions de point, vecteur, coordonnées et nombre complexe sont équivalentes. En pratique, on s'autorise parfois à confondre ces objets et ainsi à assimiler $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct – on parle de *plan complexe*. On verra au paragraphe 3 que cette interprétation des nombres complexes comme points ou vecteurs du plan sera particulièrement féconde.

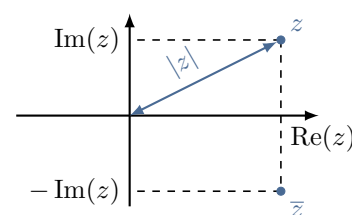
Exemple 7 Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, le milieu du segment joignant z et z' a pour affixe $\frac{z + z'}{2}$.

1.2 Conjugué et module d'un nombre complexe

Définition 8 – Conjugué, module

Soit $z \in \mathbb{C}$.

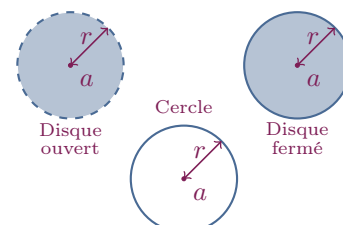
- On appelle *conjugué* de z le nombre complexe $\bar{z} = \text{Re}(z) - i \text{Im}(z)$.
- On appelle *module* de z le réel positif ou nul $|z| = \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}$.
Le module de z s'interprète comme la distance du point d'affixe z à l'origine du repère.



Exemple 9 $\overline{2 - 2i} = 2 + 2i$, $\overline{4i} = -4i$ et $\overline{\bar{2}} = 2$. $|1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Remarque 10

- Module et valeur absolue coïncident sur $\mathbb{R}$, puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \sqrt{x^2}$, ce qui garantit que cette notation commune n'est pas source d'ambiguïté.
- De par sa définition, le module $|z|$ s'interprète comme la norme du vecteur d'affixe z . Ainsi, pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ d'images A, B , le module $|a - b|$ n'est autre que la distance AB . Il en découle que, pour tout $r > 0$,
 - × l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$ est le cercle de centre a et de rayon r ;
 - × l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$ est le disque fermé de centre a et de rayon r ;
 - × l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ est le disque ouvert de centre a et de rayon r .



Théorème 11 – Propriétés du conjugué

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,

- (i) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$. (ii) $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. (iii) $\bar{\bar{z}} = z$.
 (iv) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$. (v) $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$.
 (vi) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$. (vii) $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$. (viii) si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$. (ix) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Démonstration. Exercices (il suffit d'écrire z et z' sous forme algébrique). ■

Remarque 12

- Le point (iii) du théorème précédent indique que $z \mapsto \bar{z}$ est une involution (donc une bijection) de $\mathbb{C}$.
- Les points (vi) à (ix) expriment que le conjugué d'une somme (resp. d'un produit, d'un quotient, d'une puissance) est la somme (resp. le produit, le quotient, la puissance) des conjugués.
- La propriété (ix) reste valable pour $n \in \mathbb{Z}_-$ lorsque $z \neq 0$.

Exemple 13 $\overline{(3+i)(5-8i)} = \overline{3+i} \times \overline{5-8i} = (3-i)(5+8i) = 23+19i$ et $\overline{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2} = \left(\frac{\overline{1-i}}{\overline{1+i}}\right)^2 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = -1$.

Exemple 14 Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et P la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{C}$ par $z \mapsto \sum_{k=0}^n a_k z^k$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$.

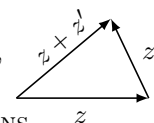
Théorème 15 – Propriétés du module

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,

- Propriétés algébriques.** $|\bar{z}| = |-z| = |z|$, $z\bar{z} = |z|^2$, $|z| = 0 \iff z = 0$.
 $|zz'| = |z| \times |z'|$, $|z^n| = |z|^n$ et si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
- Propriétés géométriques.** $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.

Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, **généralisée :** $||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$,

où (*) est une égalité si et seulement si z et z' sont, comme vecteurs, colinéaires DE MÊME SENS.



Démonstration. ... ■

En pratique

La relation $z\bar{z} = |z|^2$ permet de calculer l'inverse de $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Exemple 16 $|(3+i)(5-8i)| = |3+i| \times |5-8i| = \sqrt{10}\sqrt{89} = \sqrt{890}$ et $\left|\frac{1-i}{1+i}\right| = \frac{|1-i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$.

Exercice 17 Déterminer les complexes z pour lesquels $\frac{2z-i}{z-2i} \in \mathbb{R}$ puis $\left|\frac{2z-i}{z-2i}\right| = 1$.

1.3 Résolution de l'équation du second degré

1.3.1 Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré à coefficients réels

Rappelons la résolution bien connue de l'équation du second degré à coefficients réels.

Théorème 18 – Résolution de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$

Soit a, b, c trois réels avec a non nul.

- On appelle *discriminant* du trinôme du second degré $aX^2 + bX + c$ le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Le signe de ce dernier dicte le nombre et la nature des solutions de l'équation (E) : $aX^2 + bX + c = 0$.
Précisément :

× si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux racines réelles distinctes $x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;

× si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une racine double réelle $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

× si $\Delta < 0$, l'équation (E) admet deux racines complexes distinctes conjuguées $x_{\pm} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Principe de démonstration. Il suffit d'écrire $aX^2 + bX + c$ sous forme canonique. ■

 **En pratique**  La factorisation du trinôme du second degré se déduit évidemment de la résolution de l'équation du second degré associée. Précisément, si $x_{\pm}$ sont les deux racines (peut-être égales) dans $\mathbb{C}$ de $aX^2 + bX + c$, alors

$$aX^2 + bX + c = a(X - x_+)(X - x_-).$$

Exemple 19 Les deux solutions de l'équation $X^2 + X + 1 = 0$ sont complexes conjuguées égales à $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, ainsi $X^2 + X + 1 = \left(X - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$.

En effet, le discriminant de cette équation est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$.

1.3.2 Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré à coefficients complexes

Généralisons les résultats du paragraphe précédent au cas des équations du second degré à coefficients complexes et commençons pour cela par nous intéresser aux racines carrées d'un nombre complexe.

Théorème 20 – Racines carrées d'un nombre complexe non nul

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, l'équation $\omega^2 = z$, d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$, possède exactement DEUX solutions opposées, appelées les *racines carrées* de z .

Dans l'énoncé z est choisi non nul puisque l'équation $\omega^2 = 0$, d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$, ne possède évidemment qu'une solution, à savoir 0.

Démonstration. Écrivons z sous forme algébrique $z = x + iy$ et donnons-nous $\omega = a + ib \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique. Le ressort de la preuve est donné par l'équivalence, a priori idiote, $\omega^2 = z \iff (\omega^2 = z \text{ et } |\omega|^2 = |z|)$. On dispose alors des équivalences

$$\begin{aligned} \omega^2 = z &\iff \omega^2 = z \text{ et } |\omega|^2 = |z| &\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases} \text{ et } a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ &\iff a^2 = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}, \quad b^2 = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \quad \text{et} \quad 2ab = y. \end{aligned}$$

On tire alors aisément a et b AU SIGNE PRÈS de ces relations sur a^2 et b^2 et l'égalité $2ab = y$ permet quant à elle de savoir si a et b sont de même signe ou de signes opposés. On obtient finalement deux racines carrées $\omega = a + ib$ distinctes de z , opposées l'une de l'autre. ■

✗ ATTENTION ! ✗ La notation $\sqrt{z}$ est rigoureusement INTERDITE pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

Cette interdiction provient de notre incapacité à choisir ! En effet, tout nombre complexe non nul a DEUX racines carrées distinctes qui se valent l'une l'autre. Il n'y a que dans le cas réel positif où l'on sait choisir, puisque les deux racines carrées d'un réel positif x sont alors toutes les deux réelles, l'une positive, l'autre négative, et on choisit de noter $\sqrt{x}$ la première.

 **En pratique**  La démonstration du théorème précédent est constructive et permet d'obtenir les deux racines carrées d'un nombre complexe non nul. En pratique, on retiendra l'équivalence suivante, où $a, b \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$,

$$(a + ib)^2 = z \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = \operatorname{Re}(z) \\ 2ab = \operatorname{Im}(z) \\ a^2 + b^2 = |z|. \end{cases}$$

Exemple 21 Les racines carrées de $24 + 10i$ sont $\pm(5 + i)$.

Exemple 22 Si $z \in \mathbb{R}_+^*$, ces deux racines carrées sont $\pm\sqrt{z}$. Si $z \in \mathbb{R}_-^*$, ces deux racines carrées sont $\pm i\sqrt{-z}$.

Nous sommes à présent capables de résoudre TOUTES les équations du second degré à COEFFICIENTS COMPLEXES.

Théorème 23 – Équation du second degré à coefficients complexes

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.

- **Résolution.** Les deux solutions (comptées avec multiplicité) de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont les complexes $z_{\pm} = \frac{-b \pm \delta}{2a}$, où δ est l'une quelconque des deux racines carrées du discriminant $b^2 - 4ac$.
- **Factorisation du trinôme associé.** Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = a(z - z_+)(z - z_-)$.
- **Somme et produit des racines.** $z_+ + z_- = -\frac{b}{a}$ et $z_+ z_- = \frac{c}{a}$.

Principe de démonstration. Comme dans le cas réel, il suffit de mettre l'expression $az^2 + bz + c$ sous forme canonique. ■

Exemple 24 Les solutions de l'équation $z^2 - (3 + i)z + 2 + i = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, sont 1 et $2 + i$.

Théorème 25 – Système somme-produit

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Les couples solutions du système *somme-produit* $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$, d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, s'obtiennent à partir des deux solutions (éventuellement égales) de l'équation $X^2 - aX + b = 0$.

Principe de démonstration. Il suffit de remarquer que $(X - x)(X - y) = X^2 - (x + y)X + xy$. ■

Exemple 26 Les solutions du système $\begin{cases} x + y = 3 + i \\ xy = 2 + i \end{cases}$, d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, sont les couples $(1, 2 + i)$ et $(2 + i, 1)$.

En effet, les solutions du système en jeu sont liées aux racines du trinôme $X^2 - (3 + i)X + 2 + i$, calculées à l'exemple précédent.

2 Autour de l'exponentielle complexe

2.1 Nombres complexes de module 1

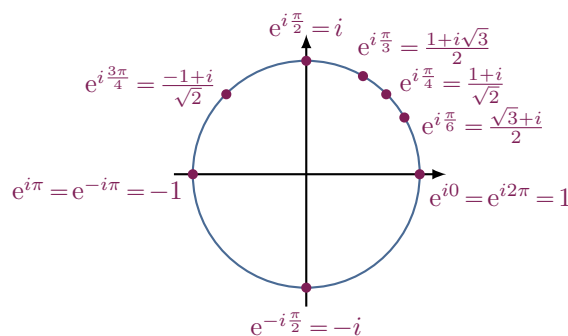
Définition 27 – Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

On note $\mathbb{U}$ le sous-ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ de $\mathbb{C}$ des nombres complexes de module 1, qui s'identifie géométriquement au cercle trigonométrique de centre 0 et de rayon 1.

Définition 28 – Exponentielle imaginaire

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle *exponentielle imaginaire du réel θ* , notée $e^{i\theta}$, le nombre complexe $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

La notation $e^{i\theta}$, qui cache un cosinus et un sinus, n'est qu'une NOTATION (en l'état de nos connaissances). Le complexe $e^{i\theta}$ n'est pas « e à la puissance $i\theta$ », ce qui n'a aucun sens. Le choix de cette notation se justifie par le comportement similaire à une exponentielle classique de l'exponentielle imaginaire, qui transforme les sommes en produits (cf. théorème 31). En réalité, une notion unique d'exponentielle se cache derrière les fonctions exponentielles réelle et imaginaire, mais celle-ci sort du cadre de ce cours (cf. cours de deuxième année...).



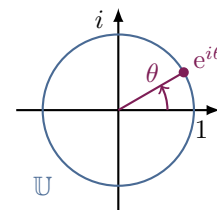
Théorème 29 – Paramétrisation de $\mathbb{U}$ par l'exponentielle imaginaire

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{U} \iff (\exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta})$. En résumé, $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}\}_{\theta \in \mathbb{R}}$.

En particulier, $e^{i\theta} \neq 0$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

- Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi]$.

En particulier, l'application $\begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{matrix}$ est surjective mais non injective.



Démonstration. Il s'agit d'une autre manière de dire que tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées de la forme $(\cos \theta, \sin \theta)$ (théorème 24 du chapitre 5), donc une affixe de la forme $e^{i\theta}$ – avec unicité de θ modulo 2π . ■

Exemple 30 – À connaître par cœur !

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on dispose des équivalences

$$\begin{aligned} e^{i\theta} = 1 &\iff e^{i\theta} = e^{i0} \iff \theta \equiv 0 [2\pi] \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}, \\ \text{et } e^{i\theta} = i &\iff e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \iff \theta \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Théorème 31 – Propriétés algébriques de l'exponentielle imaginaire

Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

(i) **Conjugaison.** $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}.$

(ii) **Formules d'Euler[†].** $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$

(iii) **Transformation somme/produit.** $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}.$

(iv) **Formule de Moivre[‡].** $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$, ce qui équivaut à $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$

Démonstration. Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

(i) $\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos \theta + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$ et $\frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{\overline{e^{i\theta}}}{|e^{i\theta}|^2} = \frac{e^{-i\theta}}{1} = \overline{e^{i\theta}}.$

(ii) Découle simplement de $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(iii) Cf. remarque ci-après.

(iv) Par récurrence à partir de (iii), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. Le résultat est alors valable pour $n \in \mathbb{Z}$ par passage à l'inverse, via (i). ■

Remarque 32 La relation « $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$ » du point (iii) RÉSUME deux formules classiques de trigonométrie. Elle se réécrit

$$\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta'),$$

et, par identification des parties réelle et imaginaire, équivaut donc aux relations

$$\cos(\theta + \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \quad \text{et} \quad \sin(\theta + \theta') = \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'.$$

[†]. Leonhard Euler (1707 à Bâle – 1783 à Saint-Petersbourg) est un mathématicien et physicien suisse. Ses travaux mathématiques ont aussi bien touché au calcul infinitésimal qu'à la théorie des graphes. On lui doit notamment la notation $f(x)$ pour les fonctions.

[‡]. Abraham de Moivre (1667 à Vitry-le-François – 1754 à Londres) est un mathématicien français.

2.2 Applications à la trigonométrie

 **En pratique**  **Technique de l'angle moitié.** La technique de l'angle moitié consiste à écrire les complexes de la forme $e^{ix} \pm e^{iy}$ sous forme factorisée. Cette technique permet notamment de factoriser des expressions en sinus et cosinus (cf. exemple ci-après). L'idée, simple, est la suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad e^{ix} + e^{iy} = \boxed{e^{\frac{i(x+y)}{2}}} \left(e^{\frac{i(x-y)}{2}} + e^{-\frac{i(x-y)}{2}} \right) = 2e^{\frac{i(x+y)}{2}} \cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

 Mise en facteur de l'ANGLE MOITIÉ $\frac{x+y}{2}$.

Cette technique s'adapte évidemment au cas des complexes de la forme $e^{ix} - e^{iy}$: $e^{ix} - e^{iy} = 2ie^{\frac{i(x+y)}{2}} \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

Exemple 33 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.

Exemple 34 Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \cos(2kx) = \begin{cases} \cos(nx) \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x} & \text{si } x \notin \pi\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{si } x \in \pi\mathbb{Z}. \end{cases}$

 **En pratique**  **Linéarisation d'expressions trigonométriques.** Linéariser une expression polynomiale en $\sin x$ et $\cos x$ – e.g. $5 \sin^4 x \cos^7 x + 2 \sin x \cos^4 x$ – consiste à l'exprimer comme une combinaison linéaire de $\sin x$, $\sin(2x)$, $\sin(3x)$, ... et $\cos x$, $\cos(2x)$, $\cos(3x)$, ... Les deux ingrédients essentiels sont les formules d'Euler et celle du binôme.

La linéarisation permet notamment le calcul des intégrales de la forme $\int_a^b \sin^m x \cos^n x \, dx$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}$.

Exemple 35 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin(5x) - 5 \sin(3x) + 10 \sin x)$.

Exemple 36 $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \frac{\pi}{8}$.

 **En pratique**  **Dé-linéarisation d'expressions trigonométriques.** Cela est moins courant, mais l'on peut aussi « dé-linéariser » les expressions trigonométriques, i.e. effectuer la transformation inverse de la linéarisation. Les deux ingrédients essentiels sont la formule de Moivre et celle du binôme.

Exemple 37 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(6x) = 2 \cos x \sin x (3 - 16 \cos^2 x + 16 \cos^4 x)$.

 **En pratique**  **Factorisation de $a \cos(t) + b \sin(t)$ – le come-back !** Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, la factorisation des expressions $a \cos(t) + b \sin(t)$ peut aussi s'obtenir comme une conséquence de la formule

$$\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}(z') - \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(z').$$

En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$a \cos(t) + b \sin(t) = \operatorname{Re}(a - ib) \operatorname{Re}(e^{it}) - \operatorname{Im}(a - ib) \operatorname{Im}(e^{it}) = \operatorname{Re}((a - ib)e^{it})$$

et il suffit alors d'écrire $a - ib$ sous forme trigonométrique (cf. paragraphe suivant).

Exercice 38 Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{2} \cos t + \sqrt{6} \sin t = \operatorname{Re}\left((\sqrt{2} - i\sqrt{6})e^{it}\right) = \operatorname{Re}\left(2\sqrt{2}e^{-i\pi/3}e^{it}\right) = 2\sqrt{2} \operatorname{Re}\left(e^{i(t-\pi/3)}\right) = 2\sqrt{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right).$$

Remarque 39 On pourrait aussi factoriser $a \cos(t) + b \sin(t)$ sous la forme $A \sin(t + \psi)$ via la formule

$$\operatorname{Im}(zz') = \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z') + \operatorname{Im}(z) \operatorname{Re}(z').$$

2.3 Forme trigonométrique

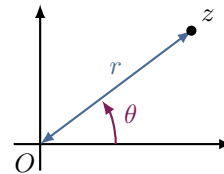
La définition suivante repose intégralement sur le fait que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ NON NUL, $\left| \frac{z}{|z|} \right| = 1$, i.e. $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.

Définition-théorème 40 – Argument(s) et forme trigonométrique

Tout nombre complexe NON NUL z peut être écrit sous la forme $z = r e^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, dite *forme trigonométrique*. Le réel r s'avère unique, car $r = |z|$, en revanche le réel θ , appelé *un argument de z* , est « unique » à 2π près seulement.

Précisément, l'ensemble des arguments de z est $\theta + 2\pi\mathbb{Z} = \{\theta + 2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Il existe toutefois un et un seul argument de z dans $]-\pi, \pi]$ et celui-ci est appelé *l'argument (principal) de z* et noté $\arg(z)$.



✗ ATTENTION ! ✗ 0 n'admet pas de forme trigonométrique et n'a donc pas d'argument, même si l'on a bien sûr $0 = 0 e^{i\theta}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Remarque 41

- Un argument d'un nombre complexe non nul z d'image M n'est rien d'autre qu'une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.
- Le théorème 40 énonce essentiellement que la fonction de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ sur $\mathbb{C}^*$ définie par $(r, \theta) \mapsto r e^{i\theta}$ est bijective.

En pratique Identification des formes trigonométriques.

$$\forall r, r' \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad r e^{i\theta} = r' e^{i\theta'} \iff (r = r' \text{ et } \theta \equiv \theta' [2\pi]).$$

Exemple 42 – À connaître par cœur ! Les formes trigonométriques des réels et des imaginaires purs doivent couler de source.

• **Cas des réels.** Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$x = \begin{cases} x e^{i0} & \text{si } x > 0 \\ -x e^{i\pi} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

• **Cas des imaginaires purs.** Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$,

$$iy = \begin{cases} y e^{i\frac{\pi}{2}} & \text{si } y > 0 \\ -y e^{-i\frac{\pi}{2}} & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Ainsi

$$z \in \mathbb{R}^* \iff \arg(z) \equiv 0 [\pi] \quad \text{et} \quad z \in i\mathbb{R}^* \iff \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi].$$

En pratique L'écriture sous forme trigonométrique s'impose dans les cas où interviennent des produits ou des puissances entières de nombres complexes non nuls. On a en effet via les propriétés de l'exponentielle imaginaire :

$$r_1 e^{i\theta_1} \dots r_n e^{i\theta_n} = r_1 \dots r_n e^{i(\theta_1 + \dots + \theta_n)} \quad \text{et} \quad (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}, \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\pm \sqrt{r} e^{i\theta/2}$ sont les deux racines carrées de $r e^{i\theta}$.

Corollaire 43 – Propriétés des arguments

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ NON NULS et $n \in \mathbb{Z}$, (i) $\arg(z z') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$. (ii) $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$.

(iii) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi]$. (iv) $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$.

Démonstration. Les deux premiers points résultent du « En pratique » précédent.

(iii) $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z| e^{i \arg(z)}} = \frac{1}{|z|} e^{-i \arg(z)}$, donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi]$.

(iv) $\bar{z} = \overline{|z| e^{i \arg(z)}} = |z| e^{-i \arg(z)} = |\bar{z}| e^{-i \arg(z)}$, donc $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$. ■

Exemple 44 $\frac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^{12}} = 8i$.

Exemple 45 Le nombre complexe $\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$ admet $\frac{\pi}{12}$ pour argument. En effet, $\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{2}}$.
 Or, $\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$, ainsi $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Théorème 46 – Lien entre la forme algébrique et la forme trigonométrique

Soit $z \in \mathbb{C}$ NON NUL de forme algébrique $z = x + iy$ et de forme trigonométrique $z = r e^{i\theta}$.

(i) Expressions de la forme algébrique à partir de la forme trigonométrique :

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta.$$

(ii) Expressions de la forme trigonométrique à partir de la forme algébrique :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \theta \equiv \begin{cases} \operatorname{Arctan} \frac{y}{x} [2\pi] & \text{si } x > 0 \\ \pi + \operatorname{Arctan} \frac{y}{x} [2\pi] & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

en notant que z est imaginaire pur si $x = 0$ (cf. exemple 42).

Démonstration. ...

On aurait pu appeler ce théorème « Lien entre coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires ».

Remarque 47 Dans le théorème précédent, le choix a été fait d'exprimer θ via un arc tangente. Naturellement, on aurait pu procéder de façon similaire avec un arc sinus ou un arc cosinus.

2.4 Exponentielle complexe

Nous disposons à ce stade de deux exponentielles, l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ et l'exponentielle imaginaire. Définissons plus généralement une fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$.

Définition 48 – Exponentielle complexe

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on appelle *exponentielle complexe* (de) z le nombre complexe :

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}.$$

En d'autres termes : $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ et $\arg(e^z) \equiv \operatorname{Im}(z) [2\pi]$. En particulier, $e^z \neq 0$.

Exemple 49 $e^{2+i\frac{\pi}{4}} = e^2 e^{i\frac{\pi}{4}} = e^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{e^2}{\sqrt{2}} + i \frac{e^2}{\sqrt{2}}$.

Remarque 50 D'une part, la fonction $z \mapsto e^z$ prolonge la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$, puisque $e^{i \operatorname{Im}(z)} = 1$ lorsque $\operatorname{Im}(z) = 0$, i.e. $z \in \mathbb{R}$. D'autre part, la fonction exponentielle imaginaire définie sur $\mathbb{R}$ par $\theta \mapsto e^{i\theta}$ coïncide avec la restriction de la fonction $z \mapsto e^z$ à la droite des imaginaires purs $i\mathbb{R}$.

Théorème 51 – Propriétés de l'exponentielle complexe

(i) **Périodicité.** L'exponentielle complexe est $2i\pi$ -périodique, i.e. pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^{z+2i\pi} = e^z$.

On dispose en fait d'un résultat plus précis : pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $e^z = e^{z'} \iff z \equiv z' [2i\pi]$.

(ii) **Transformation somme/produit.** Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Démonstration. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. (i) Par identification des formes trigonométriques, on dispose des équivalences

$$e^z = e^{z'} \iff \begin{cases} e^{\operatorname{Re}(z)} = e^{\operatorname{Re}(z')} \\ \operatorname{Im}(z) \equiv \operatorname{Im}(z') [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) \equiv \operatorname{Im}(z') [2\pi] \end{cases} \iff z \equiv z' [2i\pi].$$

(ii) $e^{z+z'} = e^{\operatorname{Re}(z+z')} e^{i \operatorname{Im}(z+z')} = e^{\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Re}(z')} e^{i \operatorname{Im}(z)+i \operatorname{Im}(z')} = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{\operatorname{Re}(z')} e^{i \operatorname{Im}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z')} = e^z e^{z'}$.

Exemple 52 L'équation $e^z = 2 + i$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, a pour solutions les nombres $\frac{\ln 5}{2} + i \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + 2ik\pi$, k décrivant $\mathbb{Z}$.

Le théorème suivant énonce que la règle de dérivation pour les composées e^u se généralise aux fonctions u à valeurs complexes.

Théorème 53 – Dérivation des fonctions de la forme e^φ

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$. La fonction $x \mapsto e^{\varphi(x)}$ est dérivable sur I de dérivée $x \mapsto \varphi'(x) e^{\varphi(x)}$.
En particulier, pour tout $a \in \mathbb{C}$, la fonction $x \mapsto e^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto a e^{ax}$.

Démonstration. Avec les notations du théorème, posons $g = \operatorname{Re}(\varphi)$ et $h = \operatorname{Im}(\varphi)$, qui sont dérivables sur I , par hypothèse sur φ (théorème 51 du chapitre 4). On a alors

$$e^\varphi = e^{g+ih} = e^g \cos h + i e^g \sin h$$

et les fonctions $e^g \cos h$ et $e^g \sin h$ sont dérivables sur I par opérations, ce qui établit la dérivabilité de e^φ (théorème 51 du chapitre 4). En outre,

$$(e^\varphi)' = (e^g \cos h)' + i(e^g \sin h)' = g' e^g \cos h - e^g h' \sin h + i(g' e^g \sin h + e^g h' \cos h) = (g' + ih') e^\varphi = \varphi' e^\varphi. \quad \blacksquare$$

2.5 Racines n^{es}

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, rappelons que la fonction racines n^e est la réciproque de la fonction puissance n^e sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad y = \sqrt[n]{x} \iff x = y^n.$$

Voyons maintenant que la situation diffère sur $\mathbb{C}$.

Définition 54 – Racines n^{es}

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- On appelle *racine n^e de z* tout nombre complexe ζ tel que $\zeta^n = z$.
- Les racines n^{es} de 1 sont dites *racines n^{es} de l'unité*. Leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$: $\mathbb{U}_n = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^n = 1\}$.

⚠ ATTENTION ! ⚠ Il est formellement interdit d'écrire $\sqrt[n]{z}$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, dans la mesure où il n'y a pas unicité des racines n^{es} d'un nombre complexe non nul, comme l'indique le théorème suivant.

Théorème 55 – Expression des racines n^{es}

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La seule racine n^e de 0 est 0.
- Soit $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{C} \text{ NON NUL}$ sous forme trigonométrique. Alors z possède exactement n racines n^{es} , à savoir les nombres complexes $\sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}\right)$, k décrivant $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
- **Cas particulier des racines n^{es} de l'unité.** $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n}\}_{0 \leq k \leq n-1}$.

Principe de démonstration. Commencer par le cas $z = 1$ (i.e. les racines de l'unité) en cherchant les solutions sous la forme $\rho e^{i\varphi}$ avec $\rho > 0$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$, puis traiter le cas général en se ramenant au cas précédent. $\blacksquare$

Remarque 56 Comme l'indique la démonstration précédente, les n racines n^{es} d'un nombre complexe non nul s'obtiennent à partir d'une de ses racines n^e et des n racines n^{es} de l'unité.

Exemple 57 Les racines cubiques de $1 + i$ sont $\sqrt[6]{2} e^{i\pi/12}$, $\sqrt[6]{2} e^{3i\pi/4}$ et $\sqrt[6]{2} e^{-7i\pi/12}$.

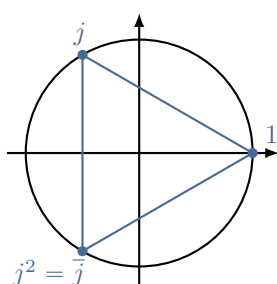
Définition-théorème 58 – Racine cubique de l'unité

On note classiquement $j = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Alors

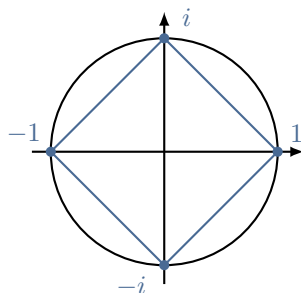
$$\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}, \quad \bar{j} = j^2 = \frac{1}{j}, \quad 1 + j + j^2 = 0 \quad \text{et} \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad z^2 + z + 1 = (z - j)(z - \bar{j}).$$

Démonstration. Simples vérifications. ■

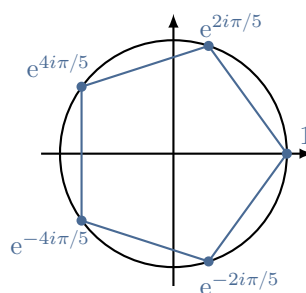
Géométriquement, on peut observer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n^{es} de l'unité est l'ensemble des sommets du polygone régulier à n côtés, de centre O et passant par le point d'affixe 1.



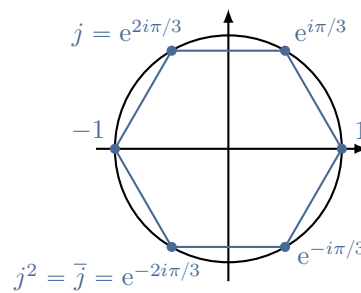
$\mathbb{U}_3$ est l'ensemble des sommets d'un triangle équilatéral.



$\mathbb{U}_4$ est l'ensemble des sommets d'un carré.



$\mathbb{U}_5$ est l'ensemble des sommets d'un pentagone régulier.



$\mathbb{U}_6$ est l'ensemble des sommets d'un hexagone régulier.

Remarque 59 Les racines n^{es} de l'unité sont conjuguées deux à deux.

3 Interprétation géométrique des nombres complexes

Théorème 60 – Interprétation géométrique de $\frac{c-a}{b-a}$

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $b \neq a$ et $c \neq a$. On note A, B et C les images respectives de a, b et c . Alors :

$$\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{AC}{AB} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) [2\pi].$$

Démonstration. On a d'une part

$$\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{|c-a|}{|b-a|} = \frac{AC}{AB}$$

et d'autre part, en considérant $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan,

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg(c-a) - \arg(b-a) \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{i}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) [2\pi].$$

🔧 **En pratique** 🔧 Avec les notations du théorème, on peut établir l'alignement des points A, B et C ou l'orthogonalité des droites (AB) et (AC) grâce aux équivalences suivantes :

$$A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0 [\pi] \iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}.$$

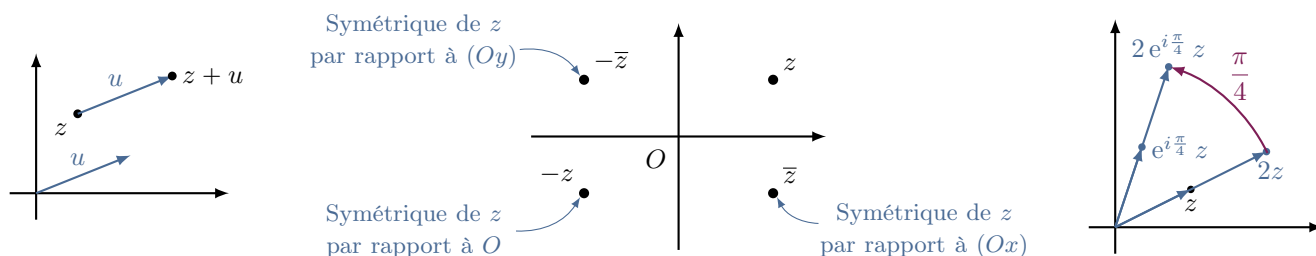
$$(AB) \text{ et } (AC) \text{ sont orthogonales} \iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}.$$

Exemple 61 L'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels le triangle de sommets z, z^2 et z^3 est rectangle en z est constitué de la droite verticale d'équation $x = -1$ et des deux points 0 et 1.

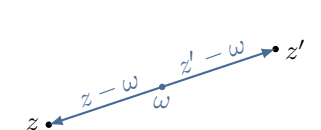
Exemple 62 Soit M, N, P et Q quatre points distincts d'affixes respectives m, n, p et q d'un cercle de centre O et de rayon ρ . Montrer que les droites (MN) et (PQ) sont parallèles si et seulement si $mn = pq$.

Transformations du plan

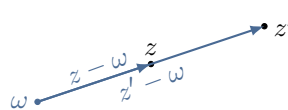
- Les figures ci-dessous indiquent :
 - × que l'addition de deux nombres complexes s'interprète géométriquement en termes de translation ;
 - × deux ou trois choses concernant les symétries les plus simples ;
 - × que le produit de deux nombres complexes s'interprète géométriquement en termes d'homothétie et de rotation.



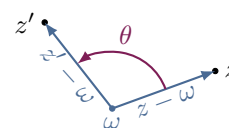
- Nous abordons maintenant le cas de transformations plus compliquées. Dans chacun des cas ci-dessous, z' désigne l'image de z par la transformation considérée.



Symétrie par rapport à ω :
 $z' - \omega = -(z - \omega)$,
i.e. $z' = 2\omega - z$.



Homothétie de centre ω et de rapport λ (ici $\lambda = 2$) :
 $z' - \omega = \lambda(z - \omega)$,
i.e. $z' = \omega + \lambda(z - \omega)$.



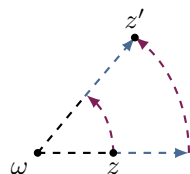
Rotation de centre ω et d'angle θ :
 $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$,
i.e. $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$.

Il apparaît ainsi que les transformations géométriques usuelles sont de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$, pour certains $a, b \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$. Réciproquement, que pouvons-nous dire en général des transformations de cette forme ?

Étude des similitudes directes. Fixons $a, b \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$, et notons f la transformation $z \mapsto az + b$, ainsi que α un argument de a .

- Si $a = 1$, f est simplement la *translation de vecteur* b .
- Si $a \neq 1$, commençons par remarquer que f possède un unique point fixe. En effet, l'équation $f(\omega) = \omega$, d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$, admet $\omega = \frac{b}{1-a}$ pour seule solution. Ce résultat va nous permettre de réécrire f sous une forme plus sympathique. Précisément, pour tout $z \in \mathbb{C}$, en posant $z' = f(z)$,

$$z' - \omega = (az + b) - (a\omega + b) = a(z - \omega) = |a| \times \underbrace{e^{i\alpha}}_{\text{Rotation de centre } \omega \text{ et d'angle } \alpha} (z - \omega) = e^{i\alpha} \times \underbrace{|a|}_{\text{Homothétie de centre } \omega \text{ et de rapport } |a|} (z - \omega).$$



Ici $|a| = 2$.

Conclusion : f est la composée d'une homothétie et d'une rotation de mêmes centres. De plus l'ordre dans lequel on compose ces deux transformations est sans importance. On dit que f est la *similitude directe de centre* ω , de *rapport* $|a|$ et d'*angle* α .

En particulier,

- × lorsque $|a| = 1$, f est la rotation de centre ω et d'angle α ;
- × lorsque $\alpha \equiv 0[2\pi]$, f est l'homothétie de centre ω et de rapport $|a|$.

Exemple 63 La fonction $z \mapsto 2iz + 1$ est la similitude directe de centre $\frac{1+2i}{5}$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

En effet, le coefficient de z dans l'expression de f est $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \neq 1$, ainsi f n'est pas une translation. Par conséquent, f est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (car $2i = 2e^{i\pi/2}$). Enfin, son centre ω est son unique point fixe :

$$f(\omega) = \omega \iff 2i\omega + 1 = \omega \iff \omega = \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{5}.$$

Remarque 64 L'étude générale des similitudes indirectes du plan $z \mapsto a\bar{z} + b$ est hors programme.

Compétences à acquérir

- Manipulations liées à la forme algébrique d'un nombre complexe (conjugué et module) : exercices 1 à 11.
- Résolution de l'équation du second degré à coefficients complexes : exercices 12 à 14.
- Utilisation de la forme trigonométrique/manipulation de l'exponentielle imaginaire : exercices 15 à 20.
- Applications à la trigonométrie : exercices 21 à 26.
- Manipulation de l'exponentielle complexe : exercice 27.
- Utilisation des racines n^{es} : exercices 28 à 37.
- Applications à la géométrie : exercices 38 à 47.

Quelques résultats classiques :

- Somme et produit des racines n^{es} (exercice 34).

Démonstrations classiques :

- Inégalité triangulaire généralisée avec cas d'égalité (théorème 15).
- Lien entre les formes algébrique et trigonométrique (théorème 46).
- Racines n^{es} (théorème 55, CCINP84).