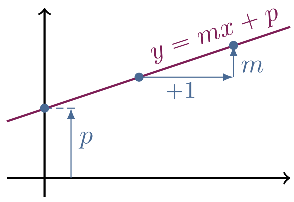
5 | Fonctions usuelles

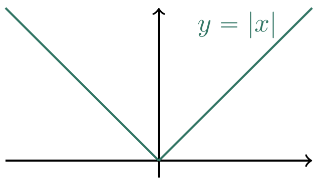
1 Fonctions affines

Définition 1 – Fonction affine

On appelle *fonction affine* toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ et de la forme $x \longmapsto mx + p$, avec $m, p \in \mathbb{R}$.

✎ En pratique ✎ Le graphe de $f : x \longmapsto mx + p$ est la droite de coefficient directeur m et d'ordonnée à l'origine p. Si l'on connaît deux valeurs $f(a)$ et $f(b)$ de f avec $a \neq b$, alors $\boxed{m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}$.



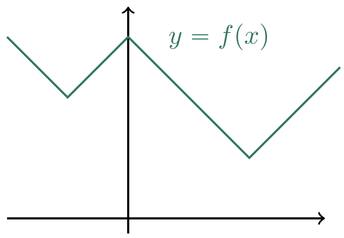


On appelle *fonction affine par morceaux* toute fonction f dont le domaine de définition est la réunion d'un nombre fini d'intervalles disjoints sur lesquels f est affine.

Exemple 2 La fonction valeur absolue est affine par morceaux, paire, continue sur $\mathbb{R}$ MAIS dérivable sur $\mathbb{R}^*$ seulement.

Exemple 3 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto |x + 1| - |x| + |x - 2|$ est affine par morceaux.

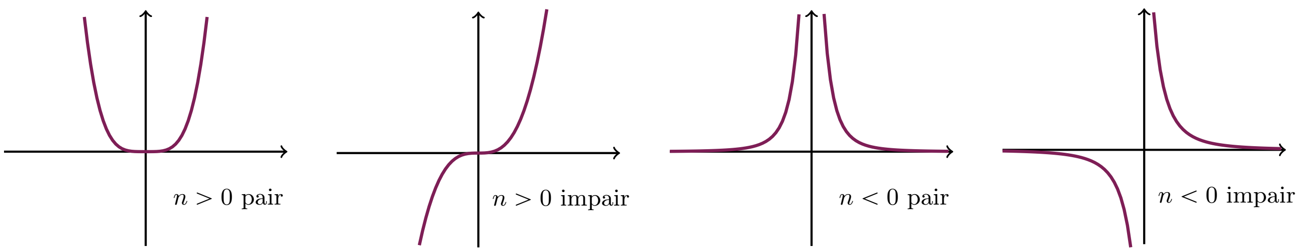
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \left\{ \begin{array}{rrrcll} (x+1) & -x & +(x-2) & = & x - 1 & \text{si } x \geqslant 2 \\ (x+1) & -x & -(x-2) & = & 3 - x & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ (x+1) & +x & -(x-2) & = & x + 3 & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ -(x+1) & +x & -(x-2) & = & 1 - x & \text{si } x < -1. \end{array} \right.$



2 Fonctions polynomiales et rationnelles

Théorème 4 – Fonctions puissances entières

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition, à savoir $\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$, de dérivée $x \longmapsto nx^{n-1}$. La parité d'une fonction puissance est celle de son exposant.



Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : x \longmapsto x^n$. Le cas $n \in \mathbb{N}$ a été vu à l'exemple 28 du chapitre 4. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{Z}_-$, $f_n = 1/f_{-n}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$, par quotient, et

$$f_n' = -\frac{f_{-n}'}{(f_{-n})^2} = -\frac{-nf_{-n-1}}{f_{-2n}} = nf_{-n-1-(-2n)} = nf_{n-1}.$$

L'expression annoncée est donc valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$. ∎

En combinant par opérations (combinaison linéaire puis quotient) les fonctions puissances, on obtient les fonctions polynomiales puis rationnelles.

Définition-théorème 5 – Fonctions polynomiales et rationnelles

- On appelle *fonction polynomiale* toute fonction f de la forme $x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Les réels a_i sont appelés les *coefficients de f* et le plus grand exposant de x doté d'un coefficient non nul est appelé le degré de f. Les fonctions polynomiales sont définies et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
- On appelle *fonction/fraction rationnelle* tout quotient d'une fonction polynomiale par une fonction polynomiale non identiquement nulle. Une fonction rationnelle est définie et indéfiniment dérivable là où son dénominateur ne s'annule pas.

Démonstration. Conséquences du théorème 4 par opérations (combinaison linéaire et quotient). ∎

✎ **En pratique** ✎ Pour calculer les limites en $\pm\infty$ d'une fonction polynomiale ou rationnelle, on factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, puis on simplifie. Par exemple :

$$4x^5 - 6x^4 + 5 = \overbrace{4x^5}^{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty} \times \underbrace{\left(1 - \frac{3}{2x} + \frac{5}{4x^5}\right)}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{x^2+2x+7}{3x^2-1} = \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{3x^2\left(1-\frac{1}{3x^2}\right)} = \frac{1}{3} \times \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}{1-\frac{1}{3x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3},$$

ces réécritures étant licites au voisinage de $+\infty$.

3 Fonctions exponentielle, logarithme(s) et puissances

Définition-théorème 6 – Fonctions exponentielle et logarithme

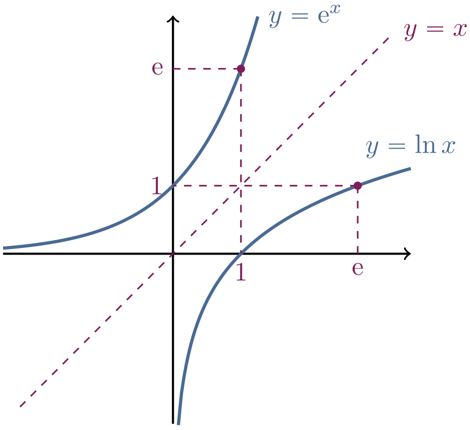
- La fonction *logarithme (népérien†)*, notée ln, est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction inverse qui s'annule en 1, ainsi
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$
Cette fonction est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de dérivée la fonction inverse. Elle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ et $\ln 1 = 0$.

x	0		1		$+\infty$
ln	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
exp	0	↗	1	↗	$+\infty$

- On appelle fonction *exponentielle*, notée exp, la réciproque de la fonction logarithme. L'exponentielle est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\exp' = \exp$. On pose $\mathrm{e}^x = \exp(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et le nombre e^1 est noté e ($\approx 2,718$).

Les graphes des fonctions exp et ln sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice.



- **Réciprocité.** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(\mathrm{e}^x) = x \quad$ et $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathrm{e}^{\ln x} = x.$
- **Transformation somme/produit.**
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \text{et} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y\,.$$
- **Croissance comparée.**
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} x\ln x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0.$$
- **Inégalités classiques.** Pour tout $x \in \left]-1\,,+\infty\right[$, $\quad \ln(1+x) \leqslant x$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \mathrm{e}^x \geqslant x+1$.

Démonstration. ... ∎

†. John Napier (1550 à Édimbourg – 1617 à Édimbourg), parfois francisé en Jean Neper, est un théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais. Dans ses ouvrages *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* et *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, parus au début du XVIIe siècle, il présente la notion de logarithme et explique comment construire une table de logarithmes, outils alors essentiels pour calculer numériquement à cette époque.

✖ **Attention !** ✖ Le réel e^x n'est pas « e multiplié x fois par lui-même », puisque en général x n'est pas un entier naturel – que signifierait « e multiplié $\sqrt{2}$ fois par lui-même » ? Cette écriture n'est qu'une NOTATION, utilisée par souci de commodité, dans la mesure où l'exponentielle transforme les sommes en produits à l'instar des puissances classiques.

Corollaire 7

Des transformations somme/produit réalisées par le logarithme et l'exponentielle, on déduit

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y\,;$ **2.** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(x^n) = n \ln x\,;$

3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}\,;$ **4.** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad e^{nx} = (e^x)^n.$

Démonstration. ... ■

Exemple 8 – Deux limites classiques $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

Définition-théorème 9 – Logarithme de base quelconque

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle *logarithme de base a*, notée $\log_a$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

En particulier, $\log_{10}$ est appelé le *logarithme décimal* et $\log_2$ le *logarithme binaire.* À l'instar de la fonction logarithme, on a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad \text{et} \quad \log_a(x^n) = n \log_a x.$$

Démonstration. Exercice. ■

Exemple 10

- Le logarithme décimal intervient en physique (décibels) et en chimie (pH).
- Si p est un entier naturel non nul, le nombre de chiffres nécessaires pour l'écriture en base 10 de p est $\lfloor 1 + \log_{10} p \rfloor$.

  En effet, il existe un unique entier n tel que $p = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$, avec a_i des entiers de l'intervalle $[\![0\,,9]\!]$ et $a_n \neq 0$. Alors

  $$10^n \leqslant p < 10^{n+1} \quad \Longrightarrow \quad n \leqslant \log_{10} p < n+1,$$

  soit $n = \lfloor \log_{10} p \rfloor$.

Puissance d'exposant quelconque Les fonctions logarithme et exponentielle permettent de généraliser la notion de fonctions puissances du théorème 4 pour un exposant réel quelconque (*i.e.* non nécessairement entier).

Définition 11 – Puissances quelconques et racines n^{es} d'un réel strictement positif

Soit x un réel STRICTEMENT POSITIF.

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on appelle *x puissance y*, noté x^y, le réel défini par $x^y = e^{y \ln x}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (ENTIER donc), on appelle *racine n^e de x*, noté $\sqrt[n]{x}$, le réel défini par $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

✖ **Attention !** ✖

- Cette nouvelle définition $x^y = e^{y \ln x}$ n'est valable que pour des valeurs STRICTEMENT POSITIVES de x du fait de la présence du terme $\ln x$.
- Ici aussi, la notation « puissance » n'est qu'une notation, x^y n'est pas le produit de x avec lui-même y fois. Il n'existe aucune autre définition de x^y dans le cas où y est un réel quelconque. Par conséquent, lorsque l'on aperçoit x^y quelque part, l'exponentielle et le logarithme DOIVENT sauter aux yeux instantanément.

Exemple 12 Pour tout $x > 1$, $x^{\frac{\ln\ln x}{\ln x}} = \exp\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\ln x\right) = \exp(\ln(\ln x)) = \ln x$.

Théorème 13 – Propriétés algébriques des puissances

La nouvelle définition des puissances généralise effectivement l'ancienne.

- **(i)** Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, les définitions $x^n = \overbrace{x \times \cdots \times x}^{n \text{ facteurs}}$ et $x^n = \mathrm{e}^{n\ln x}$ coïncident.
- **(ii)** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$,
$$\ln(x^a) = a\ln x, \qquad x^{a+b} = x^a x^b, \qquad x^{ab} = (x^a)^b, \qquad (xy)^a = x^a y^a \qquad \text{et} \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a.$$

Démonstration.

(i) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\mathrm{e}^{n\ln x} = \mathrm{e}^{\overbrace{\ln x + \ldots + \ln x}^{n \text{ fois}}} = \overbrace{\mathrm{e}^{\ln x} \times \ldots \times \mathrm{e}^{\ln x}}^{n \text{ fois}} = \overbrace{x \times \ldots \times x}^{n \text{ fois}}.$$

(ii) Pour tous $x, x' \in \mathbb{R}_+^*$ et $y, y' \in \mathbb{R}$,
$$\ln(x^y) = \ln\left(\mathrm{e}^{y\ln x}\right) = y\ln x, \tag{1}$$
$$x^{y+y'} = \mathrm{e}^{(y+y')\ln x} = \mathrm{e}^{y\ln x + y'\ln x} = \mathrm{e}^{y\ln}\mathrm{e}^{y'\ln x} = x^y x^{y'}, \tag{2}$$
$$x^{yy'} = \mathrm{e}^{yy'\ln x} \underset{(2)}{=} \mathrm{e}^{y'\ln(x^y)} = (x^y)^{y'}, \tag{3}$$
$$(xx')^y = \mathrm{e}^{y\ln(xx')} = \mathrm{e}^{y\ln x + y\ln x'} = \mathrm{e}^{y\ln x}\mathrm{e}^{y\ln x'} = x^y x'^y, \tag{4}$$
$$x^{-y} = \mathrm{e}^{-y\ln x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{y\ln x}} = \frac{1}{x^y} \quad \text{et} \quad x^{-y} = \mathrm{e}^{-y\ln x} = \mathrm{e}^{y\ln\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^y. \tag{5}$$

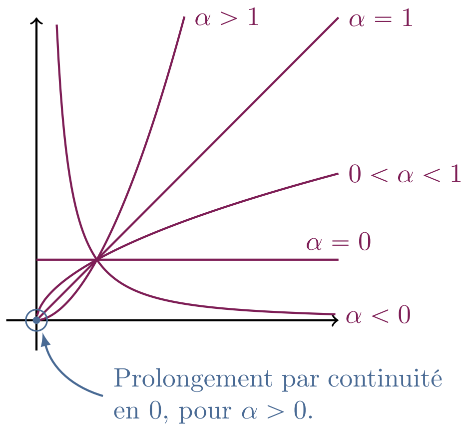
■

Remarque 14 – Fonction racine nᵉ D'après le point **(ii)** du théorème précédent, pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$,
$$(x^n)^{1/n} = x^{n\times 1/n} = x \quad \text{et} \quad \left(x^{1/n}\right)^n = x^{1/n\times n} = x.$$
Autrement dit, la fonction racine n^{e} $x \longmapsto x^{1/n}$ est la réciproque de la fonction puissance $x \longmapsto x^n$, restreinte à $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, $x^{1/2} = \sqrt{x}$.

Théorème 15 – Étude des fonctions puissances

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **(i)** La fonction $f_\alpha : x \longmapsto x^\alpha$ est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée
$$x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}.$$
En particulier, la monotonie de f_α est liée au signe de α.
- **(ii)** **Position relative.**
Pour tous $x \in \left]0, 1\right]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leqslant \beta \implies x^\beta \leqslant x^\alpha$.
Pour tous $x \in \left[1, +\infty\right[$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leqslant \beta \implies x^\alpha \leqslant x^\beta$.
En particulier :
  - $\forall x \in \left]0, 1\right]$, $0 \leqslant \ldots \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \ldots$
  - $\forall x \in \left[1, +\infty\right[$, $0 \leqslant \ldots \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2 \leqslant \ldots$



- **(iii)** **Prolongement par continuité en 0 pour $\alpha > 0$.** Lorsque $\alpha > 0$, on peut prolonger la fonction f_α par continuité en 0, en posant $0^\alpha = 0$. La nouvelle fonction obtenue est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier, y compris en 0. Un tel prolongement est appelé *prolongement par continuité*.

✖ **Attention !** ✖ Pour $\alpha \in \left]0, 1\right[$, la fonction f_α est continue en 0, mais elle y admet une demi-tangente verticale, signe qu'elle n'est pas dérivable en 0, ce qui est notamment le cas de la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot} = f_{1/2}$.

Démonstration.

(i) La fonction $f_\alpha : x \longmapsto e^{\alpha \ln x}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par opérations (composition), avec, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'_\alpha(x) = \alpha \times \ln' x \times \exp'(\alpha \ln x) = \frac{\alpha}{x}\, e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{-1} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \leqslant \beta$.

- Si $x \in]0\,,1]$, $\quad \ln x \leqslant 0$, $\quad$ ainsi

$$\alpha \leqslant \beta \quad \Longrightarrow \quad \beta \ln x \leqslant \alpha \ln x \quad \Longrightarrow \quad x^\beta = e^{\beta \ln x} \leqslant e^{\alpha \ln x} = x^\alpha.$$

- Si $x \in [1\,,+\infty[$, $\quad \ln x \geqslant 0$, $\quad$ ainsi

$$\alpha \leqslant \beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha \ln x \leqslant \beta \ln x \quad \Longrightarrow \quad x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \leqslant e^{\beta \ln x} = x^\beta.$$

(iii) Pour $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha = \lim_{x \to 0} e^{\alpha \ln x} = 0,$$

par composition de limites, et on obtient donc une fonction continue en 0 en posant $0^\alpha = 0$. ■

✎ **En pratique** ✎ Pour étudier (calcul de limite, dérivation, ...) une expression de la forme $u(x)^{v(x)}$, il est indispensable de passer à la forme exponentielle en l'écrivant sous la forme $\exp(v(x)\ln(u(x)))$!
Idem pour l'expression d'une suite $u_n^{v_n}$ que l'on écrira sous la forme $\exp(v_n \ln(u_n))$.

Exemple 16 – Résultat à connaître ! Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

Le théorème qui suit généralise les résultats de croissance comparée du théorème 6.

Théorème 17 – Croissances comparées

Le principe général est que l'exponentielle l'emporte sur les puissances qui elles-mêmes l'emportent sur le logarithme. Précisément, pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0.$$

Démonstration. ... ■

Remarque 18 Les résultats précédents n'abordent que le cas essentiel $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. En effet :

- on s'y ramène aisément par passage à l'inverse lorsque $\alpha < 0$ et $\beta < 0$;
- dans les autres cas, le calcul de limite ne souffre d'aucune indétermination.

4 Fonctions trigonométriques

Définition 19 – Relation de congruence, ensemble $\alpha\mathbb{Z} + \beta$

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

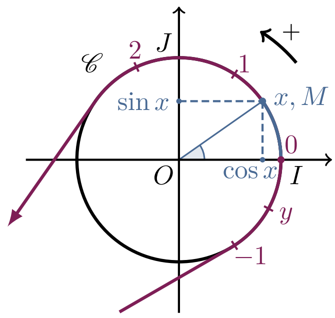
- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on dit que x *est congru à* y *modulo* α, noté $x \equiv y\ [\alpha]$, lorsque : $\quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = y + k\alpha.$
- L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv \beta\ [\alpha]\} = \{\beta + k\alpha \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est généralement noté $\alpha\mathbb{Z} + \beta$ ou $\beta + \alpha\mathbb{Z}$.

Exemple 20

- Être pair, c'est être congru à 0 modulo 2, tandis qu'être impair, c'est être congru à 1 modulo 2. L'ensemble des entiers pairs correspond à $2\mathbb{Z}$ et celui des entiers impairs à $2\mathbb{Z} + 1$.
- Les mesures d'angles orientés sont définies modulo 2π.
- On peut généraliser la notation « $\alpha\mathbb{Z} + \beta$ ». Par exemple, $\left]-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$ est l'ensemble des réels de la forme $x + k\pi$, avec $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\right[$ et $k \in \mathbb{Z}$. Remarquons qu'ici on a $\left]-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z} = \mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

4.1 Fonctions circulaires

Enroulement de la droite numérique. Soit (d) une droite numérique graduée, qui représente les réels, et dont le 0 coïncide avec le point I d'un repère orthonormé (O, I, J) du plan. Quand on enroule cette droite sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1, dit *cercle trigonométrique*, la demi-droite des réels positifs dans le sens direct et la demi-droite des réels négatifs dans le sens indirect, chaque réel x vient s'appliquer sur un unique point M du cercle $\mathscr{C}$. On dit que le point M est l'*image* de x sur le cercle $\mathscr{C}$.



Exemple 21 J est l'image de $\frac{\pi}{2}$, mais aussi de $-\frac{3\pi}{2}$.

La longueur du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, *i.e.* son périmètre, étant 2π, deux réels x et x' ont même point image par cet enroulement sur $\mathscr{C}$ si et seulement si leur distance correspond à un nombre entier de tours de $\mathscr{C}$, autrement dit s'ils sont congrus modulo 2π.

Théorème 22

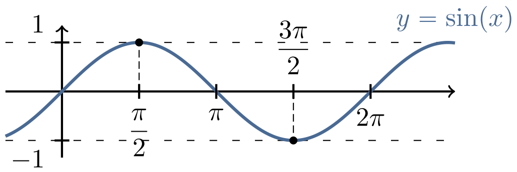
Tout point de $\mathscr{C}$ est l'image d'une infinité de réels. Précisément, si x est l'un deux, alors les autres sont les éléments de $x + 2\pi\mathbb{Z}$.

Définition 23 – Cosinus et sinus d'un réel

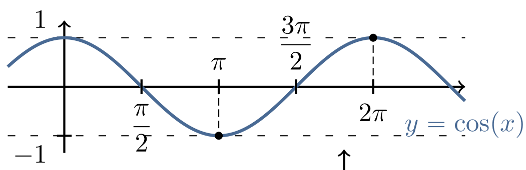
Soit M l'image d'un réel x sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$. On appelle respectivement *cosinus de* x et *sinus de* x, noté $\cos x$ et $\sin x$, l'abscisse et l'ordonnée de M.

Définition-théorème 24 – Fonctions sinus et cosinus, lien avec le cercle trigonométrique

- Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont définies et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. La fonction sinus est impaire, la fonction cosinus paire et en outre :

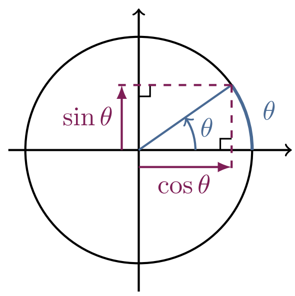


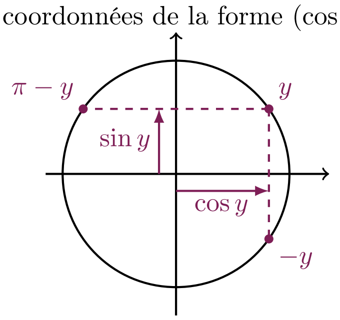
$$\sin' = \cos \quad \text{et} \quad \cos' = -\sin$$



- **Une inégalité.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$.

- **Lien avec le cercle trigonométrique.** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Réciproquement, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$, il existe un réel θ, unique modulo 2π, tel que $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Géométriquement, ce résultat signifie que tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées de la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$.





- **Résolution d'équations.** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \sin x = \sin y & \iff \quad x \equiv y\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi - y\ [2\pi] \\ \cos x = \cos y & \iff \quad x \equiv y\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -y\ [2\pi] \end{cases}$$

Ces équivalences se lisent sur le cercle trigonométrique, ce qu'illustre la figure ci-contre.

- **Angles associés.** Les relations suivantes se lisent toutes sur le cercle trigonométrique. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x^{\dagger}$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

Démonstration. Cf. annexe C. ■

Exemple 25 – Deux limites classiques $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$

Théorème 26 – Formules d'addition et de produit

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

Pour $x = y$, ces relations s'appellent *formules de duplication* : $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$,

$$\sin(2x) = 2\cos x \sin x \qquad \text{et} \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Démonstration. Cf. annexe C. ■

Exemple 27 D'après les relations $\sin(x+\pi) = -\sin x$ et $\cos(x+\pi) = -\cos x$, ajouter π dans un sinus ou un cosinus revient à le multiplier par -1. Ainsi, a fortiori, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ajouter $k\pi = \underbrace{\pi + \ldots + \pi}_{k \text{ fois}}$ revient à multiplier par $\overbrace{(-1) \times \ldots \times (-1)}^{k \text{ fois}} = (-1)^k$ et cela reste vrai pour $k \in \mathbb{Z}$. Finalement, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x \qquad \text{et} \qquad \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x.$$

Exemple 28 – Dérivées k^es de sin et cos. De $\sin' x = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $\cos' x = -\sin x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on déduit, par récurrence immédiate sur $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right).$$

✖ Attention ! ✖ On évitera les erreurs gravissimes suivantes concernant le sinus et celles similaires pour le cosinus :

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\sin x = \sin y \;\cancel{\iff}\; x = y \; [2\pi]$.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\cos x = \cos y \;\cancel{\iff}\; x = y \; [2\pi]$.

Exemple 29 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \cos x \iff x \equiv \dfrac{\pi}{4} \; [\pi]$.

En effet, $\sin x = \cos x \iff \sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

$$\iff x \equiv \frac{\pi}{2} - x \; [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) [2\pi] \iff 2x \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi] \text{ ou } \underbrace{0 \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi]}_{\text{Impossible}} \iff x \equiv \frac{\pi}{4} \; [\pi].$$

†. Cette égalité traduit la propriété géométrique : « le cosinus (co-sinus) d'un angle x est égal au sinus de l'angle complémentaire $\frac{\pi}{2} - x$ ».

✎ **En pratique** ✎ **Factorisation de $a\cos(t)+b\sin(t)$** Soit a et b deux réels avec $(a,b)\neq(0,0)$. Dans la mesure où

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$$

il existe $\varphi\in\mathbb{R}$ tel que $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=(\cos\varphi,\sin\varphi)$ et il vient, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$a\cos t+b\sin t=\sqrt{a^2+b^2}[\cos\varphi\cos t+\sin\varphi\sin t]=\sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\varphi).$$

Remarque 30 Avec les notations précédentes et en supposant a et b positifs, l'égalité

$$a\cos t+b\sin t=\sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\varphi)$$

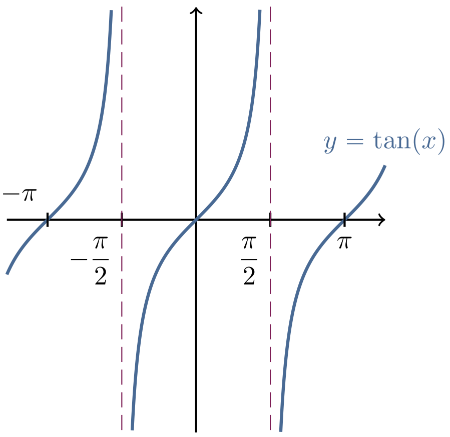
exprime que la somme des signaux sinusoïdaux $t\longmapsto a\cos t$ et $t\longmapsto b\sin t$, d'amplitudes respectives a et b, est encore un signal sinusoïdal d'amplitude $\sqrt{a^2+b^2}$ et déphasé de $-\varphi$.

Exemple 31 Pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\sqrt{2}\cos t+\sqrt{6}\sin t=\sqrt{2+6}\left[\frac{1}{2}\cos t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right]=2\sqrt{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right).$$

Ainsi la somme des signaux sinusoïdaux $t\longmapsto\sqrt{2}\cos t$ et $t\longmapsto\sqrt{6}\sin t$ est un signal sinusoïdal d'amplitude $2\sqrt{2}$ et déphasé de $-\frac{\pi}{3}$.

Définition-théorème 32 – Fonction tangente

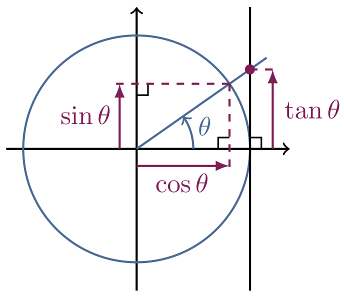


On appelle *fonction tangente* la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$ par la relation :

$$\tan=\frac{\sin}{\cos}.$$

Elle est indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition, π-périodique et impaire. En outre,

$$\tan'=1+\tan^2=\frac{1}{\cos^2}.$$



#ThéorèmeDeThalès

- **Résolution d'équations.** $\tan x=\tan y \iff x\equiv y\ [\pi]$ et $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$.
- **Angles associés.** Pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$, $\tan(\pi+x)=\tan x$ et $\tan(\pi-x)=-\tan x$.
- **Formules d'addition et de duplication.** Les formules suivantes sont vraies pour toutes les valeurs réels de x et y pour lesquelles chaque tangente est correctement définie.†

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y},\qquad \tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}\qquad\text{et}\qquad \tan(2x)=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

Démonstration. … ■

†. Le sens de cette phrase est que la bonne définition de $\tan(x+y)$ assure notamment la non nullité du dénominateur $1-\tan x\tan y$ dans la formule d'addition de la tangente. Idem pour les autres formules.

Exemple 33 Pour tout $x \in \left]-\pi\,,\pi\right[+ 2\pi\mathbb{Z}$, si l'on pose $t = \tan\dfrac{x}{2}$, alors

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{et, lorsque } x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Il est important (conformément au programme) de savoir retrouver ces formules, notamment utiles pour certains calculs d'intégrales par changement de variable (cf. chapitre 7).

En effet, on a facilement

$$\tan x = \tan\left(2\times\frac{x}{2}\right) = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2},$$

puis

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

et enfin, lorsque $x \not\equiv 0\ [\pi]$, $\tan x \neq 0$ et

$$\cos x = \frac{\sin x}{\tan x} = \frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1-t^2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

cette égalité étant finalement aussi valable lorsque $x \equiv 0\ [2\pi]$.

Remarque 34 – Fonction cotangente (HP) À l'instar de la fonction tangente, on définit également la fonction *cotangente* comme la fonction définie sur $\left]0\,,\pi\right[+ \pi\mathbb{Z}$ par $\operatorname{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$. On notera que la fonction cotan n'est pas l'inverse de la fonction tan, les fonctions cotan et $1/\tan$ n'ayant pas les mêmes domaines de définition !

4.2 Fonctions circulaires réciproques

Du fait de leurs propriétés respectives de périodicité, les fonctions sinus, cosinus et tangente ne sauraient être injectives sur leurs ensembles de définition respectifs et a fortiori bijectives. En revanche, le théorème de la bijection peut être appliqué à des restrictions *ad hoc* de ses fonctions. Précisément,

- la RESTRICTION de la fonction sinus à l'intervalle $[-\pi/2\,,\pi/2]$ est continue et strictement croissante, elle réalise donc une bijection de $[-\pi/2\,,\pi/2]$ sur $[-1\,,1]$;
- la RESTRICTION de la fonction cosinus à l'intervalle $[0\,,\pi]$ est continue et strictement décroissante, elle réalise donc une bijection de $[0\,,\pi]$ sur $[-1\,,1]$;
- la RESTRICTION de la fonction tangente à l'intervalle $]-\pi/2\,,\pi/2[$ est continue et strictement croissante, elle réalise donc une bijection de $]-\pi/2\,,\pi/2[$ sur $\mathbb{R}$.

Ces choix privilégiés de restrictions mènent à la définition et au théorème suivants.

Définition-théorème 35 – Fonctions arc sinus, arc cosinus et arc tangente

- La fonction *arc sinus*, notée Arcsin, est la réciproque de $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}$. Elle réalise une bijection strictement croissante de $[-1\,,1]$ sur $[-\pi/2\,,\pi/2]$, est impaire, continue sur $[-1\,,1]$ et indéfiniment dérivable sur $]-1\,,1[$.

  Pour tout $x \in [-1\,,1]$, $\operatorname{Arcsin} x$ est l'unique réel α de $[-\pi/2\,,\pi/2]$ tel que $\sin\alpha = x$.
- La fonction *arc cosinus*, notée Arccos, est la réciproque de $\cos|_{[0,\pi]}$. Elle réalise une bijection strictement décroissante de $[-1\,,1]$ sur $[0\,,\pi]$, est continue sur $[-1\,,1]$ et indéfiniment dérivable sur $]-1\,,1[$.

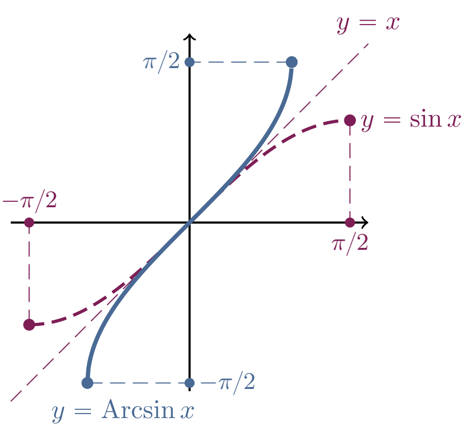
  Pour tout $x \in [-1\,,1]$, $\operatorname{Arccos} x$ est l'unique réel α de $[0\,,\pi]$ tel que $\cos\alpha = x$.
- La fonction *arc tangente*, notée Arctan, est la réciproque de $\tan|_{]-\pi/2,\pi/2[}$. Elle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi/2\,,\pi/2[$, est impaire et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

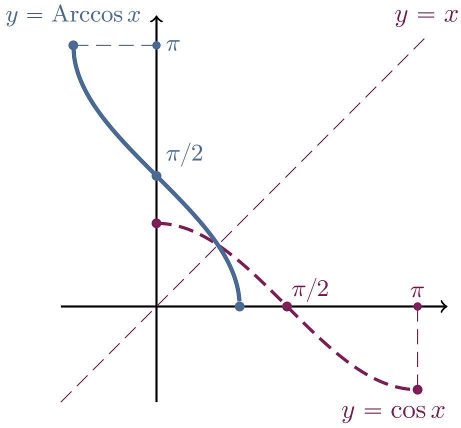
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan} x$ est l'unique réel α de $]-\pi/2\,,\pi/2[$ tel que $\tan\alpha = x$.

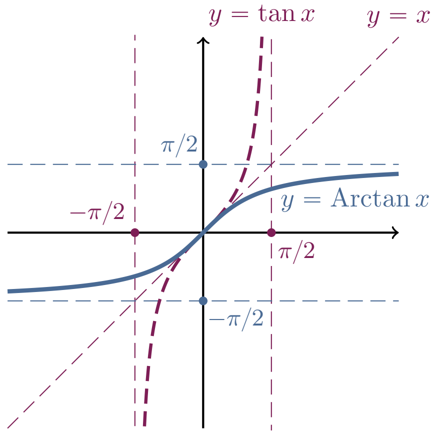
On dispose par ailleurs des formules suivantes

$$\forall x \in \left]-1\,,1\right[, \quad \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Démonstration. … ■







x	-1	0	1
Arcsin	$-\pi/2$ ↗	0 ↗	$\pi/2$

x	-1	0	1
Arccos	π ↘	$\pi/2$ ↘	0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Arctan	$-\pi/2$ ↗	0 ↗	$\pi/2$

Remarque 36 Les fonctions arc sinus et arc cosinus ne sont pas dérivables en ± 1, dans la mesure où les dérivées de leurs fonctions réciproques s'annulent aux abscisses correspondantes. En ces points leurs représentations graphiques possèdent une demi-tangente verticale.

✖ **Attention !** ✖ La fonction arc *bidule* n'est pas la réciproque de la fonction *bidule*, mais d'une de ses restrictions privilégiée. Par conséquent

$\boxed{\text{VRAI : } \forall x \in [-1\,,1], \quad \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x.}$ $\boxed{\text{VRAI : } \forall x \in [-\pi/2\,,\pi/2], \quad \operatorname{Arcsin}(\sin x) = x.}$

$\boxed{\text{FAUX : } \forall \cancel{x \in} \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arcsin}(\sin x) = x.}$

$\boxed{\text{VRAI : } \forall x \in [-1\,,1], \quad \cos(\operatorname{Arccos} x) = x.}$ $\boxed{\text{VRAI : } \forall x \in [0\,,\pi], \quad \operatorname{Arccos}(\cos x) = x.}$

$\boxed{\text{FAUX : } \forall \cancel{x \in} \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arccos}(\cos x) = x.}$

$\boxed{\text{VRAI : } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\operatorname{Arctan} x) = x.}$ $\boxed{\text{VRAI : } \forall x \in \left]-\pi/2\,,\pi/2\right[, \quad \operatorname{Arctan}(\tan x) = x.}$

$\boxed{\text{FAUX : } \forall \cancel{x \in} \left]-\pi/2\,,\pi/2\right[+ \pi\mathbb{Z}, \quad \operatorname{Arctan}(\tan x) = x.}$

Exemple 37 $\operatorname{Arcsin}\left(\sin \dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6}$, $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = \dfrac{\pi}{3}$ et $\operatorname{Arctan}\left(\tan \dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$.

Exemple 38 Pour tout $x \in [-1\,,1]$, $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$ et $\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$.

Exemple 39 L'unique solution de l'équation $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos} \dfrac{4}{5}$ est $\dfrac{3}{5}$.

Exemple 40 Pour tout $x \in [-1\,,1]$, $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \dfrac{\pi}{2}$.

Exemple 41 $$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

✎ **En pratique** ✎ Le résultat de l'exemple précédent permet de ramener l'étude de la fonction arc tangente à l'infini à son étude en 0.

Exemple 42 La fonction $f : x \longmapsto x \operatorname{Arctan} x$ admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$.

5 Fonctions hyperboliques

Définition-théorème 43 – Sinus et cosinus hyperboliques

Les fonctions *sinus hyperbolique* et *cosinus hyperboliques*, notées respectivement sh et ch et définies sur $\mathbb{R}$ par

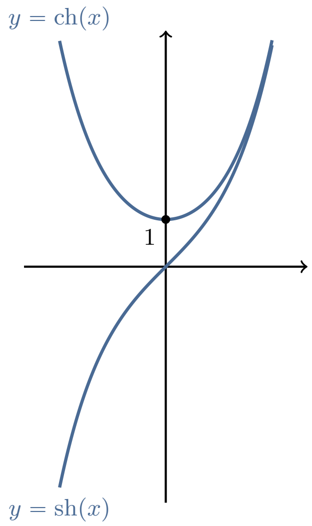
$$\operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2},$$

sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$. La fonction sinus hyperbolique est impaire et réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. La fonction cosinus hyperbolique est paire et réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $[1\,,+\infty[$. On a en outre

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Démonstration. ... ■



Remarque 44

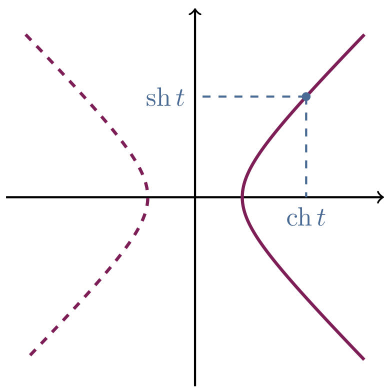
- Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques sont respectivement la partie paire et la partie impaire de la fonction exponentielle.
- À l'instar des fonctions sinus et cosinus qui permettent de paramètrer le cercle trigonométrique, la relation $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ peut s'interpréter géométriquement en considérant l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

  La fonction sh étant bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, pour tout point (x, y) de $\mathcal{H}$ d'abscisse positive, il existe un unique réel t tel que $(x, y) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$. Ainsi, l'application

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) \end{array}\right.$$

  est un paramétrage de la branche droite de l'hyperbole $\mathcal{H}$, l'autre branche étant paramétrée par

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (-\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t). \end{array}\right.$$



Exemple 45 Les solutions de l'équation $\operatorname{ch} x = 3$ sont $\ln\big(3 \pm 2\sqrt{2}\big)$.

Définition-théorème 46 – Tangente hyperbolique

La fonction *tangente hyperbolique*, notée th et définie sur $\mathbb{R}$ par

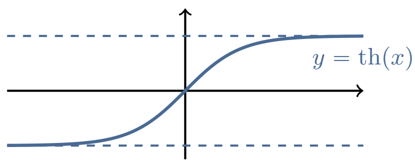
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1},$$

est impaire et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{th}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x.$$

Elle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,,1[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
th	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1



Démonstration. ... ■

A Table des dérivées des fonctions usuelles

	Fonction f	Dérivée f'	Domaine de dérivavilité
1	$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \\ ]-\infty\,,0[\text{ ou }]0\,,+\infty[& \text{si } \alpha \in \mathbb{Z}_- \\ ]0\,,+\infty[& \text{sinon} \end{cases}$
2	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0\,,+\infty[$
3	e^x	e^x	$\mathbb{R}$
4	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
5	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
6	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}\,,\dfrac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$
7	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
8	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
9	$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$\mathbb{R}$
10	$\operatorname{Arcsin} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1\,,1[$
11	$\operatorname{Arccos} x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1\,,1[$
12	$\operatorname{Arctan} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Remarque 47 Toutes les fonctions usuelles de la table ci-dessus sont indéfiniment dérivables sur leurs ensembles de dérivabilité respectifs.

B Valeurs remarquables des fonctions trigonométriques

Les valeurs remarquables des fonctions trigonométriques doivent être connues PAR CŒUR !

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{Arcsin} x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{Arccos} x$	$-\pi$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\operatorname{Arctan} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

C Preuves des théorèmes 24 et 26

Parité et périodicité. Les propriétés de parité et de 2π-périodicité des fonctions sinus et cosinus découlent directement de leur définition géométrique.

Identité $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Simple conséquence du théorème de Pythagore.

Angles associés. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons $M(x)$ le point de coordonnées $(\cos x, \sin x)$. Les formules concernant les angles associés découlent des remarques géométriques suivantes :

- $\pi + x$: $M(x+\pi)$ est le symétrique de $M(x)$ par rapport à l'origine du repère ;
- $\pi - x$: $M(\pi - x)$ est le symétrique de $M(x)$ par rapport à l'axe des ordonnées ;
- $\frac{\pi}{2} - x$: $M\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ est le symétrique de $M(x)$ par rapport à la première bissectrice ;

et de la relation $\frac{\pi}{2} + x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Preuve du théorème 26. On considère le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Rappelons que si $\vec{u}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{u}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, alors

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\|\|\vec{u}_2\| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

- $\mathbf{cos(a-b)}$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Dans un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, considérons deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\left(\vec{i}, \vec{u}\right) = b$ et $\left(\vec{i}, \vec{v}\right) = a$. On a alors $\vec{u} = (\cos b, \sin b)$ et $\vec{v} = (\cos a, \sin a)$, d'où

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

  Mais on a aussi $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(a-b)$, puisque, d'après la relation de Chasles,

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \left(\vec{u}, \vec{i}\right) + \left(\vec{i}, \vec{v}\right) = -\left(\vec{i}, \vec{u}\right) + \left(\vec{i}, \vec{v}\right) = a - b.$$

- $\mathbf{sin(a-b)}$. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin b = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

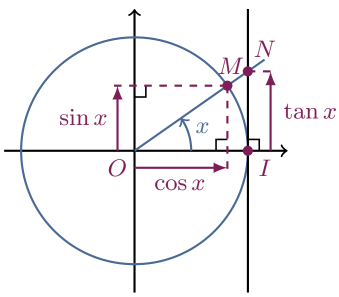
- $\mathbf{cos(a+b)}$ et $\mathbf{sin(a+b)}$. Découlent des deux formules précédentes et des propriétés de parité de sin et cos.

Les autres formules de produit et de duplication sont alors immédiates.

Dérivabilité et dérivées.

- $\mathbf{sin'(0) = 1}$. Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, notons M le point de coordonnées $(\cos x, \sin x)$, I le point de coordonnées $(1, 0)$ et N le point d'intersection de la droite (OM) avec la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par I. Il est alors clair que

$$\begin{aligned} & \text{Aire(triangle } OIM) \leqslant \text{Aire(secteur } OIM) \leqslant \text{Aire(triangle } OIN) \\ \iff \quad & \frac{\sin x}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{\tan x}{2} = \frac{\sin x}{2\cos x} \\ \underset{\sin x > 0}{\iff} \quad & 1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1, \end{aligned}$$



  ainsi, par encadrement et inverse, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Or, par imparité du sinus, pour tout $x < 0$,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 1,$$

  par composition de limites. Au total, on a donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

- $\mathbf{cos'(0) = 0}$. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$, $\cos x + 1 \neq 0$ et

$$\frac{\cos x - \cos 0}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{-\sin x}{1 + \cos x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1 \times \frac{0}{2} = 0,$$

  par opérations sur les limites. Ainsi cos est dérivable en 0 et $\cos' 0 = 0$.

- **sin′ = cos**. Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$,

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \frac{\sin h}{h}\cos x + \sin x \frac{\cos h - 1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1 \times \cos x + 0 \times 0 = \cos x,$$

par opérations sur les limites. Ainsi sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$.

- **cos′ = sin**. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, ainsi cos est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos' x = 1 \times \sin'\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

On en déduit par récurrence immédiate sur $\mathbb{N}$ que les fonctions sinus et cosinus sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

Inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$.

- Sur $[0\,,\pi]$. La fonction sinus est concave sur $[0\,,\pi]$ ($\sin'' = -\sin \leqslant 0$), on a donc, pour tout $x \in [0\,,\pi]$,

$$0 \leqslant \sin x \leqslant \sin' 0(x-0) + \sin 0 = x.$$

- Sur $[-\pi\,,0]$. Découle du point précédent par imparité du sinus. En effet, pour tout $x \in [-\pi\,,0]$,

$$|\sin x| = |-\sin(-x)| = |\sin(-x)| \leqslant |-x| = |x|.$$

- Sur $\mathbb{R}\backslash[-\pi\,,\pi]$. L'inégalité est triviale, dans la mesure où le sinus est à valeurs dans $[-1\,,1]$.