

Rappels et compléments pour l'étude des fonctions

Dans l'ensemble de ce chapitre, lorsque l'on considère un intervalle de $\mathbb{R}$, on suppose implicitement que celui-ci contient au moins deux points.

1 Fonctions numériques

Définition 1 – Fonction numérique, ensemble de définition

- On appelle *fonction numérique* toute fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.
- L'*ensemble* (ou *domaine*) de *définition* d'une fonction numérique f correspond à l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression $f(x)$ est correctement définie.

1.1 Opérations sur les fonctions numériques

Les définitions de la somme, du produit et du quotient de deux fonctions numériques découlent de ces mêmes opérations définies entre nombres réels ou complexes.

Définition 2 – Somme, produit, quotient

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $f, g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{C}$.

- **Somme.** $f + g$ désigne la fonction définie sur A par

$$\forall x \in A, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$
- **Produit.** fg désigne la fonction définie sur A par

$$\forall x \in A, \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$
- **Multiplication par un scalaire.**
 λf désigne la fonction définie sur A par

$$\forall x \in A, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$
- **Quotient.** Lorsque g ne s'annule pas sur A , $\frac{f}{g}$ désigne la fonction définie sur A par

$$\forall x \in A, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

On dispose aussi de l'opération de composition, introduite au chapitre 3.

Définition 3 – Composée

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$, et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions, telles que f est à valeurs dans B . On appelle *composée de f suivie de g* , notée $g \circ f$, la fonction définie sur A par

$$\forall x \in A, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

La condition « f est à valeurs dans B » est évidemment primordiale, puisque pour pouvoir considérer l'expression $g(f(x))$, pour tout $x \in A$, il est nécessaire que $f(x)$ appartienne à l'ensemble de définition B de g , pour tout $x \in A$.

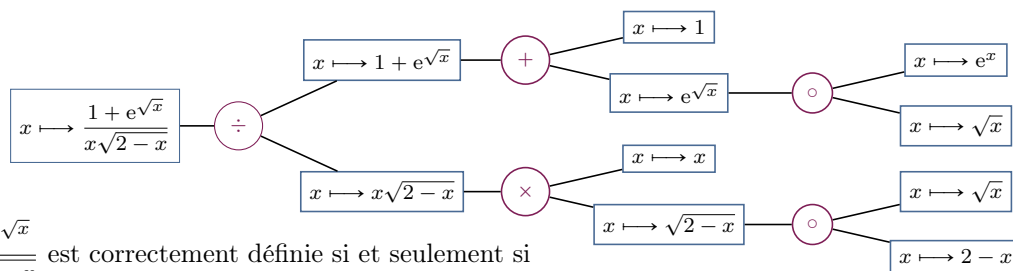
On peut schématiser l'opération de composition via le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \xrightarrow{g} \mathbb{C} \\ & \searrow & \nearrow \\ & g \circ f & \end{array}$$

Exemple 4 La fonction $x \longmapsto \sqrt{1 - x^2}$ est définie sur $[-1, 1]$.

Exemple 5 La fonction $x \mapsto \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{2-x}}$ est définie sur $]0, 2[$.

En effet, la construction par opérations de cette fonction est détaillée par l'arbre ci-dessous.



L'expression $\frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{2-x}}$ est correctement définie si et seulement si

$$\begin{aligned} & x \geq 0, \quad \sqrt{x} \in \mathbb{R}, \quad 2-x \geq 0 \quad \text{et} \quad x\sqrt{2-x} \neq 0 \\ \iff & x \geq 0, \quad x \leq 2, \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad x \neq 2 \\ \iff & x \in]0, 2[. \end{aligned}$$

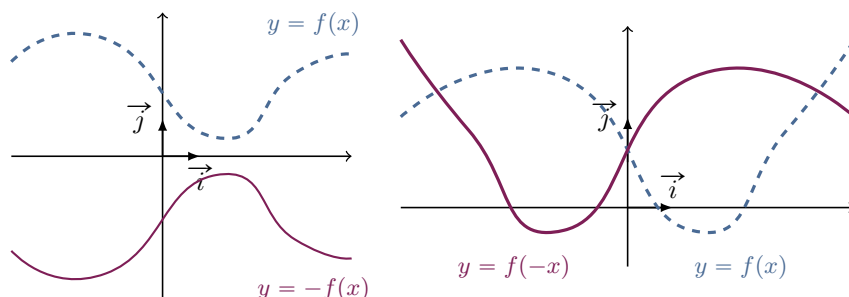
1.2 Transformation affine du graphe d'une fonction à valeurs réelles

Les graphes des fonctions considérées dans ce paragraphe sont représentés dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans l'ensemble de ce qui suit, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et des réels a et b .

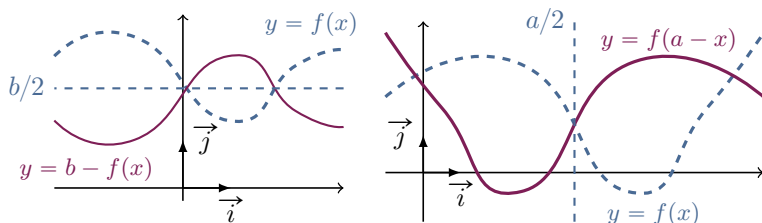
Deux symétries simples.

Le graphe de la fonction $x \mapsto -f(x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie axiale d'axe (Ox) .

Le graphe de la fonction $x \mapsto f(-x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie axiale d'axe (Oy) .



Exemple 6 Observons que, pour tous $a, x \in \mathbb{R}$, les réels x et $a-x$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à $a/2$. En effet, $a/2$ est le milieu du segment d'extrémités x et $a-x$, puisque $\frac{x + (a-x)}{2} = \frac{a}{2}$. Ainsi

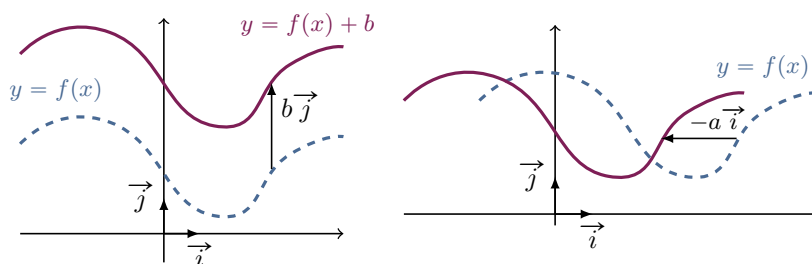


- le graphe de la fonction $x \mapsto b - f(x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $y = b/2$;
- le graphe de la fonction $x \mapsto f(a-x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $x = a/2$.

Translations.

Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x) + b$ s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $b\vec{j}$.

Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x+a)$ s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $-a\vec{i}$.

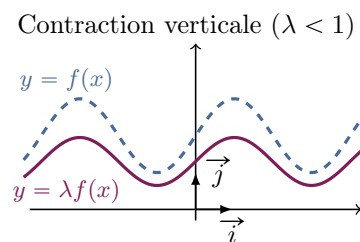
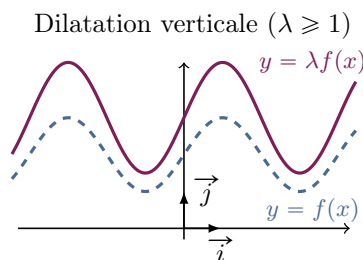


⚠ ATTENTION ! ⚠ Pour la translation $f_a : x \mapsto f(x+a)$, on notera bien la présence du signe moins pour le vecteur de translation $-a\vec{i}$. En effet, la fonction f_a atteint la valeur $f(0)$ en $-a$, ainsi cette dernière est EN AVANCE de a sur f , lorsque a est positif.

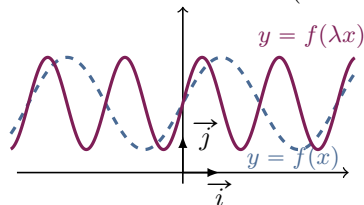
Contractions/dilatations. Soit $\lambda > 0$.

Le graphe de la fonction $x \mapsto \lambda f(x)$ s'obtient à partir de celui de f par

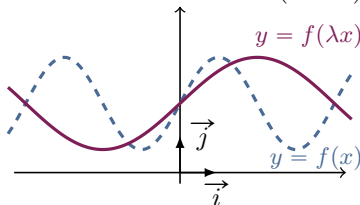
- une dilatation verticale de rapport λ si $\lambda \geq 1$;
- une contraction verticale de rapport $1/\lambda$ si $\lambda < 1$.



Contraction horizontale ($\lambda \geq 1$)



Dilatation horizontale ($\lambda < 1$)



Le graphe de la fonction $x \mapsto f(\lambda x)$ s'obtient à partir de celui de f par

- une contraction horizontale de rapport λ si $\lambda \geq 1$;
- une dilatation horizontale de rapport $1/\lambda$ si $\lambda < 1$.

2 Propriétés éventuelles d'une fonction

Pour chacune des notions introduites ci-dessous, il est essentiel d'en maîtriser les diverses interprétations graphiques.

2.1 Parité d'une fonction

Définition 7 – Fonction paire, fonction impaire

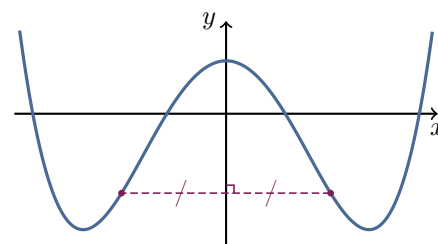
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- La fonction f est dite *paire* lorsque, pour tout $x \in A$, $-x \in A$ ET $f(-x) = f(x)$.
- La fonction f est dite *impaire* lorsque, pour tout $x \in A$, $-x \in A$ ET $f(-x) = -f(x)$.

Remarque 8 Dire que, pour tout $x \in A$, $-x$ est aussi un élément de A équivaut à ce que la partie A de $\mathbb{R}$ soit *symétrique par rapport à 0*.

Théorème 9 – Interprétation graphique

- Dans un repère QUELCONQUE, la courbe représentative d'une fonction impaire admet l'origine des axes de coordonnées comme centre de symétrie.
- Dans un repère ORTHOGONAL, la courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

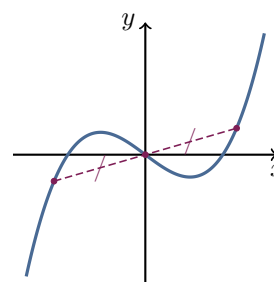


Courbe représentative d'une fonction paire

Exemple 10 La fonction carrée $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est paire et la fonction inverse $x \mapsto 1/x$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est impaire.

Remarque 11 Lorsque 0 est un élément de l'ensemble de définition d'une fonction impaire, on a $f(0) = 0$.

En pratique Du fait de ces propriétés de symétrie, le domaine d'étude d'une fonction paire ou impaire peut être réduit, en l'occurrence à $A \cap \mathbb{R}_+$.



Courbe représentative d'une fonction impaire

2.2 Fonctions périodiques

Définition 12 – Fonction périodique

Soit T un réel.

- Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite T -périodique lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in A \iff x + T \in A$.
- Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction avec A une partie T -périodique de $\mathbb{R}$. La fonction f est dite T -périodique ou périodique de période T lorsque

$$\forall x \in A, \quad f(x + T) = f(x).$$

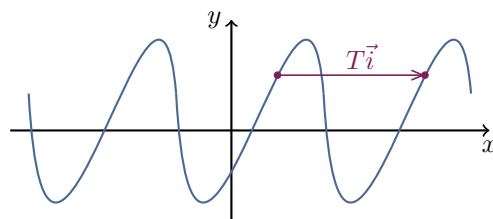
Le cas échéant, le réel T est appelé UNE période de f .

- Une fonction est dite périodique lorsqu'elle possède au moins une période NON NULLE.

✗ **ATTENTION !** ✗ Une fonction périodique ne possède jamais une seule période. En effet, tout multiple entier d'une période T est encore une période ! Pour cette raison, on ne parle jamais de « la » période, mais toujours d'UNE période.

Exemple 13

- Les fonctions constantes sont périodiques.
- Les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques.



Théorème 14 – Interprétation graphique

La courbe représentative d'une fonction périodique de période T est globalement invariante par les translations de vecteur $kT\vec{i}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

✎ **En pratique** ✎ À l'instar des fonctions paires ou impaires, le domaine d'étude d'une fonction T -périodique peut être réduit ; en l'occurrence à un sous-ensemble de longueur T de $\mathbb{R}$, e.g. $[0, T[\cap A$.

Théorème 15 – Opérations sur les fonctions périodiques

Soit T un réel non nul, A une partie T -périodique de $\mathbb{R}$ et $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions T -périodiques.

- Les fonctions $f + g$ et fg sont T -périodiques sur A , ainsi que $\frac{f}{g}$, si g ne s'annule pas sur A .
- Pour tout $\omega > 0$, la fonction $x \longmapsto f(\omega x)$ est $\frac{T}{\omega}$ -périodique sur l'ensemble dilaté/contracté $\frac{1}{\omega}A$, où l'ensemble $\frac{1}{\omega}A$ correspond à la partie de $\mathbb{R}$ définie par $\left\{ \frac{a}{\omega} \mid a \in A \right\}$.

Démonstration.

(i) Simples vérifications.

(ii) Notons g la fonction $x \longmapsto f(\omega x)$ définie en tout point x tel que $\omega x \in A$, i.e. sur $\frac{1}{\omega}A$. Alors, pour tout $x \in \frac{1}{\omega}A$, d'une part, sachant que A est une partie T -périodique de $\mathbb{R}$, on dispose des équivalences

$$x + \frac{T}{\omega} \in \frac{1}{\omega}A \iff \omega \left(x + \frac{T}{\omega} \right) \in A \iff \omega x + T \in A \iff \omega x \in A \iff x \in \frac{1}{\omega}A$$

ainsi $\frac{1}{\omega}A$ est une partie $\frac{T}{\omega}$ -périodique, et d'autre part

$$g\left(x + \frac{T}{\omega}\right) = f\left(\omega \left(x + \frac{T}{\omega}\right)\right) = f(\omega x + T) = f(\omega x) = g(x).$$

■

Si par exemple $\omega = 2$, le graphe de la fonction $x \longmapsto f(2x)$ est la contraction horizontale de facteur 2 de celui de f (cf. paragraphe 1.2). Ainsi, si f est T -périodique, il n'est pas étonnant que $x \longmapsto f(2x)$ soit $\frac{T}{2}$ -périodique.

Exemple 16 La fonction $x \longmapsto \sin(2x)$ est π -périodique, puisque la fonction sinus est 2π -périodique.

2.3 Fonctions monotones

Définition 17

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- (i) f est dite *strictement croissante* sur A lorsque : (iii) f est dite *croissante* sur A lorsque :

$$\forall x, y \in A, \quad x < y \implies f(x) < f(y).$$

$$\forall x, y \in A, \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

- (ii) f est dite *strictement décroissante* sur A lorsque : (iv) f est dite *décroissante* sur A lorsque :

$$\forall x, y \in A, \quad x < y \implies f(x) > f(y).$$

$$\forall x, y \in A, \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y).$$

Dans les deux premiers (resp. derniers) cas, la fonction f est dite *strictement monotone* (resp. *monotone*) sur A . Enfin, f est dite *constante* sur A lorsque : $\forall x, y \in A, \quad f(x) = f(y)$.

Remarque 18

- On peut évidemment CARACTÉRISER la monotonie d'une fonction DÉRIVABLE sur un INTERVALLE par le signe de sa dérivée (cf. théorème 33), mais c'est là un THÉORÈME et non une DÉFINITION. La définition précédente est générale et ne requiert ni la dérivabilité de f ni que A soit un intervalle de $\mathbb{R}$.
- La monotonie des fonctions est souvent le bon outil pour justifier la conservation ou l'inversion du sens d'une inégalité que l'on cherche à transformer.

Théorème 19 – Opérations sur les fonctions monotones

- (i) **Somme.** Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- Si f et g sont croissantes sur A , alors $f + g$ est croissante sur A .
- Si f et g sont décroissantes sur A , alors $f + g$ est décroissante sur A .

- (ii) **Produit.** Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- Si f et g sont croissantes et POSITIVES sur A , alors fg est croissante sur A .
- Si f et g sont décroissantes et POSITIVES sur A , alors fg est décroissante sur A .

- (iii) **Composée.** Soit $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- Si f et g sont monotones de même sens de variation, alors $g \circ f$ est croissante sur A .
- Si f et g sont monotones de sens de variation contraires, alors $g \circ f$ est décroissante sur A .

- (iv) **Réciproque.** Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction bijective de A sur B .

Si f est monotone sur A , alors elle l'est strictement et f^{-1} est strictement monotone sur B de même sens de variation.

Dans les énoncés précédents, on peut remplacer « croissante » (resp. « décroissante ») par « strictement croissante » (resp. « strictement décroissante »).

Démonstration. Les points (i) à (iii) sont laissés en exercice (simples conséquences de la définition de la monotonie et des propriétés des inégalités dans $\mathbb{R}$).

(iv) Supposons f décroissante (le cas « croissante » est similaire). Pour tous $x, x' \in A$, si $x < x'$, alors $f(x) \geq f(x')$, mais l'égalité $f(x) = f(x')$ est exclue par injectivité de f , ainsi $f(x) > f(x')$. Par conséquent, f est strictement décroissante sur A . Par ailleurs, pour tous $y, y' \in B$ avec $y < y'$, si jamais $f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y')$, alors, par décroissance de f sur A , il viendrait

$$y = f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(y')) = y',$$

ce qui est contradictoire et on a donc $f^{-1}(y) > f^{-1}(y')$, ce qui établit la décroissance stricte de f^{-1} . ■

Exemple 20 Il est inutile de dériver pour justifier que les fonctions $x \mapsto x + e^x$ et $x \mapsto e^{e^x}$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

✗ **ATTENTION ! ✗** La fonction identité $x \mapsto x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, mais multipliée par elle-même on obtient la fonction carrée $x \mapsto x^2$ qui n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$. L'hypothèse de positivité au point (ii) n'est donc pas là pour décorer.

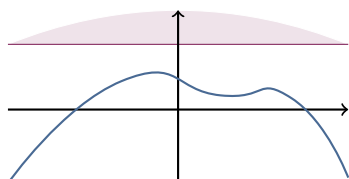
2.4 Fonctions bornées, extrema

Définition-théorème 21

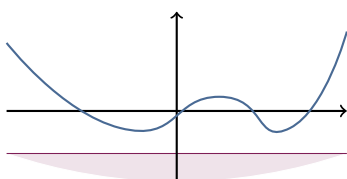
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- La fonction f est dite *majorée sur A* lorsque : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, f(x) \leq M$. Un tel réel M est appelé un majorant de f sur A . On dit aussi que f est *majorée par M sur A* ou que M *majoré f sur A* .
- La fonction f est dite *minorée sur A* lorsque : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, f(x) \geq m$. Un tel réel m est appelé un minorant de f sur A . On dit aussi que f est *minorée par m sur A* ou que m *minore f sur A* .
- La fonction f est dite *bornée sur A* lorsqu'elle est majorée et minorée sur A , ce qui équivaut à

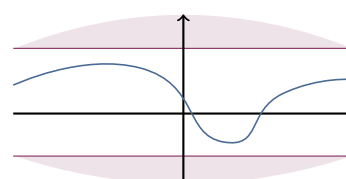
$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in A, |f(x)| \leq K.$$



Fonction majorée non minorée



Fonction minorée non majorée



Fonction bornée

Démonstration. Par définition, l'assertion « f est majorée et minorée sur A » s'écrit

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq f(x) \leq M.$$

Montrons que cette formulation est équivalente à celle donnée dans la définition.

- Si l'on suppose vraie « $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in A, |f(x)| \leq K$ », alors on a $-K \leq f(x) \leq K$, pour tout $x \in A$ et f est donc minorée et majorée.
- Réciproquement, si l'on suppose vraie « $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq f(x) \leq M$ », posons $K = \max\{|m|, |M|\}$. Alors on a, pour tout $x \in A$, $-K \leq m \leq f(x) \leq M \leq K$, soit $|f(x)| \leq K$. ■

Théorème 22

L'ensemble des fonctions bornées sur une partie A de $\mathbb{R}$ est stable par combinaison linéaire et par produit.

Démonstration. Soit f et g deux fonctions définies et bornées sur une partie A de $\mathbb{R}$. Il existe alors deux réels K et L tels que

$$\forall x \in A, |f(x)| \leq K \quad \text{et} \quad |g(x)| \leq L.$$

On a alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\forall x \in A, |(\lambda f + \mu g)(x)| \leq |\lambda||f(x)| + |\mu||g(x)| \leq |\lambda|K + |\mu|L \quad \text{et} \quad |(fg)(x)| = |f(x)||g(x)| \leq KL.$$

Ainsi la combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ et le produit fg sont bornés sur A . ■

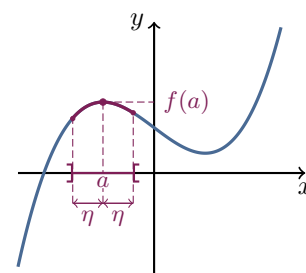
Définition-théorème 23 – Extrema

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in A$.

- On dit que f admet un *maximum sur A en a* lorsque, pour tout $x \in A$, $f(x) \leq f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le maximum de f sur A et noté $\max_A f$ ou $\max_{x \in A} f(x)$.
- On dit que f admet un *maximum local en a* lorsque

$$\exists \eta > 0, \forall x \in A, |x - a| < \eta \implies f(x) \leq f(a). \quad (1)$$

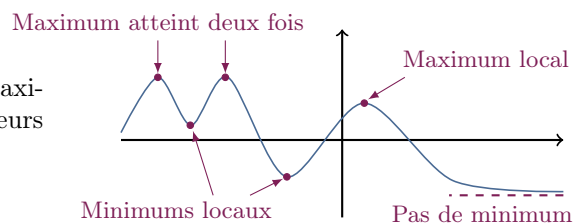
- On définit de manière analogue les notions de *minimum* et *minimum local*.
- On dit que f admet un *extremum* (resp. *extremum local*) lorsque f admet un maximum ou un minimum (resp. un maximum local ou un minimum local).



Démonstration. Le premier point de la définition précédente suggère l'unicité du maximum d'une fonction f . En effet, supposons que f admette deux maximums sur A , atteints respectivement en a et b . On aurait alors, puisque $f(a)$ est un maximum, $f(b) \leq f(a)$ et, pour des raisons analogues, $f(a) \leq f(b)$, ce qui impose $f(a) = f(b)$. ■

Remarque 24 L'assertion (1) équivaut à l'existence d'un intervalle ouvert centré en a , en l'occurrence l'intervalle $I =]a - \eta, a + \eta[$, tel que, pour tout $x \in A \cap I$, $f(x) \leq f(a)$.

✗ **ATTENTION !** ✗ Une fonction peut ne pas avoir de maximum/minimum et quand elle en a un, celui-ci peut être atteint en plusieurs points distincts.



Exemple 25 La fonction cosinus admet 1 pour maximum sur $\mathbb{R}$ qui est atteint en tous les points de l'ensemble $2\pi\mathbb{Z}$. De même, elle possède un minimum -1 , atteint en tous les points de l'ensemble $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$.

3 Fonctions dérivables, dérivées successives

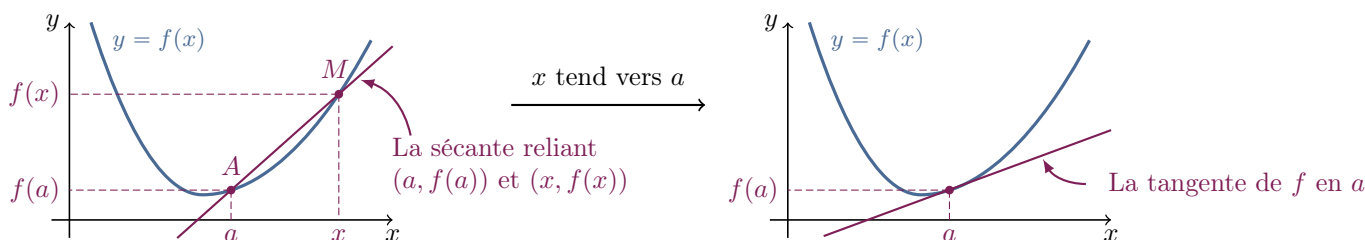
Les résultats de cette section seront démontrés au chapitre 19 dédié à la dérivation. Dans l'ensemble de ce paragraphe, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Définition 26 – Dérivabilité, tangente

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- La fonction f est dite *dérivable en a* lorsque la limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ EXISTE ET EST FINIE. Le cas échéant, cette limite est appelée le *nombre dérivé de f en a* et est notée $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.
- L'ensemble des fonctions dérivables sur I , i.e. dérivables en tout point de I , est noté $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$.
Pour tout $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, la fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée la *dérivée de f* et notée f' ou $\frac{df}{dx}$.
- Si f est dérivable en a , la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ est appelée la *tangente (à la courbe) de f en a* .

Si f est dérivable en a , alors pour $x \approx a$, on a $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \approx f'(a)$, soit $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$. Ce raisonnement sans rigueur suggère que la tangente à la courbe de f en a est la droite la plus proche du graphe de f au voisinage de a . D'un point de vue géométrique, sachant que le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ de f entre a et x est la pente de la corde reliant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$, la limite $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ représente la « pente limite » des cordes précitées.



✗ **ATTENTION !** ✗

LA NOTATION « $(f(x))'$ » EST INTERDITE !

En revanche, on pourra écrire $\frac{d}{dx}(f(x))$.

Pour dériver une fonction, e.g. $f : x \mapsto e^{\sin x}$, on n'écrira pas

$$\text{« Pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = \cancel{(e^{\sin x})'} = \cos x e^{\sin x} \text{ »,}$$

mais simplement

$$\text{« Pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = \cos x e^{\sin x} \text{ »} \quad \text{ou} \quad \text{« Pour tout } x \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx}(e^{\sin x}) = \cos x e^{\sin x} \text{ ».}$$

Définition 27 – Dérivées successives

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit les *dérivées successives de f sur I* par récurrence :

$$f^{(0)} = f \quad \text{et} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ si } f^{(k)} \text{ est définie et dérivable sur } I, \text{ alors } f^{(k+1)} = (f^{(k)})'.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(k)}$, aussi notée $\frac{d^k f}{dx^k}$, lorsqu'elle est définie, est appelée fonction *dérivée k^e (ou d'ordre k) de f sur I* et la fonction f est dite *k fois dérivable sur I* .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I et à valeurs réelles et $\mathcal{D}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I et à valeurs réelles.

On préfère généralement les notations f, f', f'' et f''' aux notations $f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}$ et $f^{(3)}$.

Exemple 28 Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction puissance $x \mapsto x^n$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{d^k}{dx^k}(x^n) = k! \binom{n}{k} x^{n-k} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n, \end{cases}$$

avec la convention $0 \times 0^{n-k} = 0$ pour $k > n$.

Théorème 29 – Opérations sur les dérivées

Soit $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- **Combinaison linéaire.** $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et
- **Produit.** fg est dérivable sur I et
- **Quotient.** Si g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et

Soit I et J deux intervalles, $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}(J, \mathbb{R})$ tels que f est à valeurs dans J .

- **Composée.** $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)' &= \lambda f' + \mu g' \\ (fg)' &= f'g + fg' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ (g \circ f)' &= f' \times g' \circ f \end{aligned}$$

Les énoncés précédents restent valables en remplaçant « dérivable » par « k fois dérivable », avec $k \in \mathbb{N}$, ou par « indéfiniment dérivable ». En revanche, les formules de la colonne à droite ne valent que pour les dérivées premières.

 **En pratique**  Pour montrer qu'une fonction est deux fois (resp. k fois, resp. indéfiniment) dérivable, on applique directement le théorème précédent. On ne s'amuse pas à montrer qu'elle est dérivable, à la dériver, puis à montrer que sa dérivée est à nouveau dérivable !

Remarque 30 La formule de dérivation d'un produit se généralise à un produit d'un nombre fini quelconque de facteurs : si $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables sur I , avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors le produit $f_1 \cdots f_n$ est dérivable sur I et

$$\left(\prod_{i=1}^n f_i\right)' = \sum_{i=1}^n f_i' \prod_{j \neq i} f_j.$$

Exemple 31 Les fonctions polynomiales sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et les fractions rationnelles sont indéfiniment dérivables sur leur ensemble de définition.

Exemple 32 La fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x(1-x)})$ est définie sur $]0, 1]$ et indéfiniment dérivable sur $]0, 1[$.

Théorème 33 – Caractérisation des fonctions dérivables constantes/monotones sur un intervalle

Soit I un INTERVALLE et $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$.

- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I .
- f est croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I .
- f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle ouvert non vide.

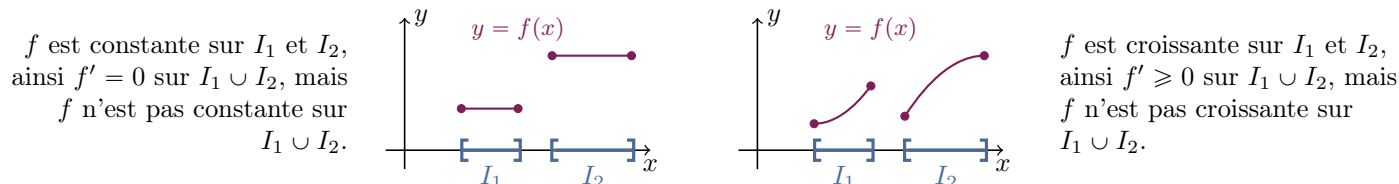
En particulier, si f' est strictement positive sur I , alors f est strictement croissante sur I .

On dispose évidemment de résultats analogues pour la décroissance, *mutatis mutandis*.

 **En pratique**  On calcule généralement les dérivées pour leur **SIGNE**. Par conséquent

FACTORISEZ TOUJOURS VOS DÉRIVÉES LE PLUS POSSIBLE !

✗ ATTENTION ! ✗ Dans le théorème précédent, l'hypothèse selon laquelle I est un **INTERVALLE** est cruciale. Ce théorème est faux lorsque I est une réunion d'intervalles non vides disjoints.



Pour prévenir d'éventuels drames, on se limitera essentiellement à parler de monotonie sur des **INTERVALLES** de $\mathbb{R}$.

 **En pratique**  On a souvent besoin d'établir des inégalités en mathématiques et, s'il n'y a pas de méthode unique pour y parvenir, il y en a quand même une qu'il faut toujours avoir en tête : l'**ÉTUDE DU SIGNE D'UNE FONCTION**, SOUVENT EN LIEN AVEC CELLE DE SES VARIATIONS.

Exemple 34 Pour tout $x \in [0, 2]$, $\frac{x+1}{x^2+3} \in \left[\frac{1}{7}, 1\right]$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x+1}{x^2+3} \in \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$.

Exemple 35 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $\frac{x+1}{x-1} \ln x \geq 2$. **Exemple 36** Pour tous $x, y \in]-1, 1[$, $\frac{x+y}{1+xy} \in]-1, 1[$.

4 Plan d'étude d'une fonction

Le plan d'étude d'une fonction f est le suivant :

1. Détermination de l'ensemble de définition de la fonction.
2. Recherche d'éventuelles propriétés de parité ou de périodicité de f , afin de réduire le domaine d'étude.
3. Étude de la monotonie de f et construction du tableau de variations de f (par convention, les flèches indiquent la stricte monotonie).
4. Étude des limites de f aux bornes des intervalles d'étude, calcul des extrema.
5. Allure graphique. Dans un repère, on place :
 - les points particuliers (tangentes horizontales, points d'inflexion, ...);
 - les droites particulières (tangentes, asymptotes) de la courbe (généralement précisées par l'énoncé), pour lesquelles il peut être utile d'étudier la position relative à la courbe;
 - éventuellement des points supplémentaires.

5 Réciproque d'une bijection

L'énoncé suivant est un cas particulier du théorème 72 du chapitre 3.

Théorème 37 – Bijectivité et réciproque

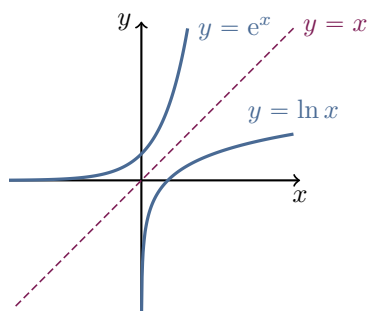
Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow B$ une fonction.

f est bijective de A sur B si et seulement si f admet une réciproque.

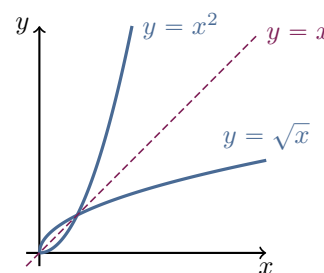
Une telle réciproque est alors unique, appelée LA réciproque de f et notée f^{-1} , et vérifie

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Géométriquement, cette équivalence signifie que les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice).



La symétrie des graphes de f et f^{-1} par rapport à la droite d'équation $y = x$ se visualise aisément sur les figures ci-contre.



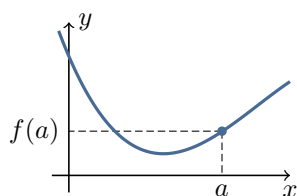
5.1 Théorème de la bijection continue

À nouveau, nous reviendrons longuement et avec démonstrations sur les énoncés des deux paragraphes suivants aux chapitres 16 et 19 dédiés aux questions de continuité et de dérivabilité respectivement.

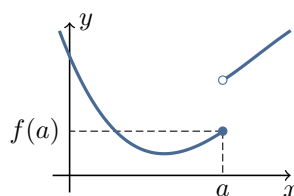
Définition 38 – Continuité

Soit I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

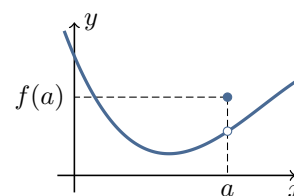
- La fonction f est dite *continue en a* lorsque $\lim_a f$ existe. Le cas échéant, cette limite vaut nécessairement $f(a)$.



f est continue en a



f N'est PAS continue en a



f N'est PAS continue en a

- L'ensemble des fonctions continues sur I , i.e. continues en tout point de I , est noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Remarque 39 Les règles opératoires pour les fonctions dérivables s'énoncent *mutatis mutandis* pour les fonctions continues, i.e. on peut remplacer le mot « dérivable » par « continue » dans le théorème 29.

Le théorème suivant rappelle le lien entre continuité et dérivabilité pour une fonction.

Théorème 40 – Dérivabilité et continuité

Soit I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

⚠ ATTENTION ! ⚠ La réciproque est fausse ! On pourra penser aux fonctions valeur absolue ou racine carrée au point d'abscisse 0.

Théorème 41 – Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

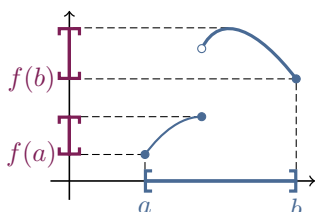
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est CONTINUE sur l'intervalle $[a, b]$, alors tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède AU MOINS UN antécédent par f dans $[a, b]$.

En termes d'équations, le TVI énonce que si une fonction f est continue sur $[a, b]$, alors, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution dans $[a, b]$. En outre, si l'on note $\alpha = \min\{f(a), f(b)\}$ et $\beta = \max\{f(a), f(b)\}$, alors le TVI affirme que l'intervalle $[\alpha, \beta]$ est inclus dans $f[[a, b]]$.

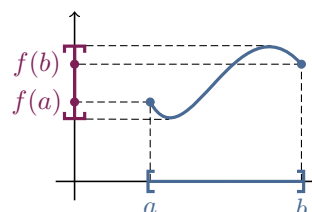
⚠ ATTENTION ! ⚠

En général, $f[[a, b]] \neq [f(a), f(b)]$, $f]a, b[\neq]f(a), f(b)[$, etc.

Ici f n'est pas continue sur $[a, b]$.



Ici f n'est pas strictement monotone sur $[a, b]$.



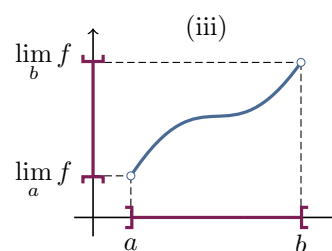
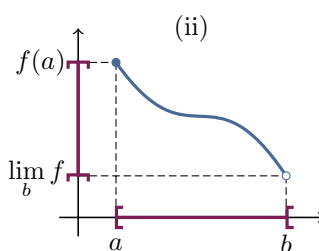
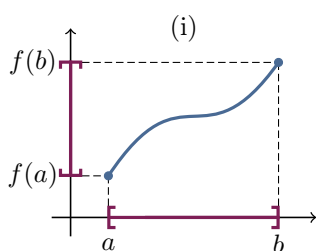
Ces égalités fausses et pourtant tentantes s'avèrent vraies sous des hypothèses raisonnables : la CONTINUITÉ et la STRICTE MONOTONIE, comme l'énonce le théorème ci-après.

Théorème 42 – Théorème de la bijection continue

Si I est un INTERVALLE et f une fonction CONTINUE et STRICTEMENT MONOTONE sur I , alors $f[I]$ est un intervalle et f réalise une bijection de I sur $f[I]$.

Précisément, les bornes de l'intervalle image $f[I]$ s'obtiennent en lien avec les limites de f aux bornes de l'intervalle source I . Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on a par exemple :

- (i) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction CONTINUE et STRICTEMENT CROISSANTE sur l'INTERVALLE $[a, b]$, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
- (ii) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction CONTINUE et STRICTEMENT DÉCROISSANTE sur l'INTERVALLE $[a, b]$, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $] \lim_b f, f(a)]$.
- (iii) Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction CONTINUE et STRICTEMENT CROISSANTE sur l'INTERVALLE $]a, b[$, alors f réalise une bijection de $]a, b[$ sur $] \lim_a f, \lim_b f]$.



Il existe bien sûr d'autres versions selon que f est croissante ou décroissante et définie ou non en a et b , avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Remarque 43 Le TVI est un théorème d'« existence » (au moins un antécédent) tandis que le théorème de la bijection continue est un théorème d'« existence et unicité » (bijectivité = un et un seul antécédent).

Exemple 44 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

En pratique Dès qu'il s'agit de montrer l'existence et l'unicité d'un réel (typiquement la solution d'une équation) que l'on a peu de chance de déterminer explicitement, la mise en œuvre du théorème de la bijection est tout indiqué.

Exemple 45 Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^n = \cos x$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ possède une et une seule solution x_n .

5.2 Monotonie, continuité et dérivabilité d'une réciproque

Théorème 46 – Monotonie, continuité et dérivabilité d'une réciproque

Soit I et J deux INTERVALLES de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective de I sur J .

- (i) **Monotonie.** Si f est monotone sur I , alors elle l'est strictement et sa réciproque f^{-1} est strictement monotone de même sens sur J .
- (ii) **Continuité.** Si f est continue sur I , alors f^{-1} est continue sur J .
- (iii) **Dérivabilité.** Si f est dérivable sur I ET SI f' NE S'ANNULE PAS SUR I , alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Cet énoncé reste valable en remplaçant « dérivable » par « k fois dérivable », avec $k \in \mathbb{N}$, ou par « indéfiniment dérivable ». En revanche, la formule donnant $(f^{-1})'$ ne vaut que pour les dérivées premières.

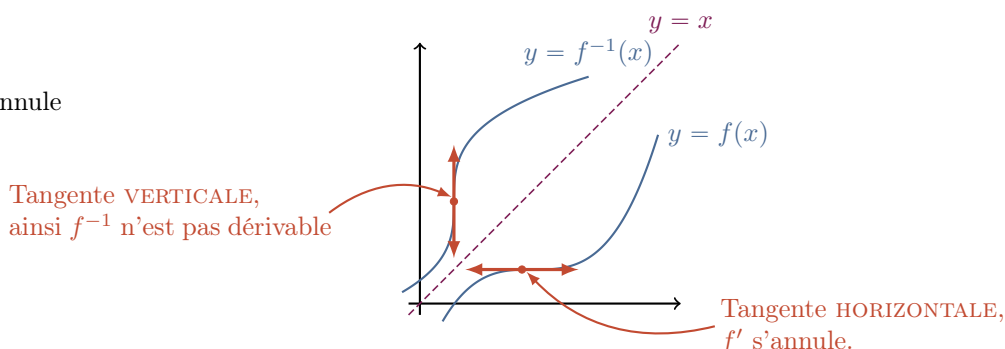
Démonstration. (i) Cf. théorème 19.

(ii)/(iii) La démonstration de la continuité/dérivabilité de f^{-1} n'a rien de trivial (et sera vue ultérieurement), en revanche l'obtention de la formule de dérivation de f^{-1} en découle aisément ensuite. Il suffit en effet de dériver la relation « $f \circ f^{-1} = \text{Id}_J$ » :

$$(f^{-1})' \times f' \circ f^{-1} = 1.$$

✗ ATTENTION ! ✗

L'hypothèse selon laquelle f' ne s'annule pas est essentielle !



Exemple 47 La fonction carrée f restreinte à $\mathbb{R}_+$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée $f' : x \mapsto 2x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, en vertu du théorème précédent, la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sqrt{\cdot}'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

6 Extension aux fonctions à valeurs complexes

Cette ultime section vise à étendre brièvement les définitions et théorèmes précédents aux fonctions de la variable réelle à valeurs complexes.

Définition 48 – Fonction partie réelle/imaginaire, fonction conjuguée

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On note respectivement $\text{Re}(f)$, $\text{Im}(f)$ et $\bar{f}$ les fonctions définies sur A par

$$\forall x \in A, \quad \text{Re}(f)(x) = \text{Re}(f(x)), \quad \text{Im}(f)(x) = \text{Im}(f(x)) \quad \text{et} \quad \bar{f}(x) = \overline{f(x)}.$$

On a donc, $f = \text{Re}(f) + i \text{Im}(f)$ et $\bar{f} = \text{Re}(f) - i \text{Im}(f)$.

6.1 Propriétés éventuelles

Les notions de parité (définition 7) et de périodicité (définition 12) restent valables pour les fonctions complexes. En revanche, les notions liées aux inégalités dans $\mathbb{R}$ (monotonie, majorant, minorant, maximum, minimum, etc.) n'ont aucun sens pour les fonctions complexes. On se contentera de la notion suivante.

Définition-théorème 49 – Fonction bornée

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

- **Définition.** La fonction f est dite *bornée sur A* lorsque $|f|$ est majorée, i.e.

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, \quad |f(x)| \leq M.$$

- **Caractérisation.** f est bornée sur A si et seulement si $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ le sont.

Démonstration. La caractérisation annoncée résulte des inégalités suivantes :

$$|\text{Re } f| \leq |f|, \quad |\text{Im } f| \leq |f| \quad \text{et} \quad |f| \leq |\text{Re } f| + |\text{Im } f|.$$

Remarque 50 La démonstration du théorème 22 reste valable pour les fonctions à valeurs complexes.

6.2 Continuité et dérivabilité

Pour un intervalle I de $\mathbb{R}$ et un entier naturel k , on notera respectivement $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$, $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ et $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions respectivement continues, dérivables et k fois dérivables sur I et à valeurs complexes. Dans l'immédiat, nous nous baserons sur le théorème suivant, qui sera établi aux chapitres 16 et 19.

Théorème 51 – Caractérisation de la continuité et de la dérivabilité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et n un entier naturel.

- La fonction f est continue sur I si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.
- La fonction f est dérivable sur I si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont et, le cas échéant, on a

$$f' = (\operatorname{Re} f)' + i(\operatorname{Im} f)', \quad \text{autrement dit} \quad \operatorname{Re}(f') = (\operatorname{Re} f)' \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f') = (\operatorname{Im} f)'.$$

- La fonction f est n fois dérivable sur I si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont et, le cas échéant, on a

$$f^{(n)} = (\operatorname{Re} f)^{(n)} + i(\operatorname{Im} f)^{(n)} \quad \text{autrement dit} \quad \operatorname{Re}(f^{(n)}) = (\operatorname{Re} f)^{(n)} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f^{(n)}) = (\operatorname{Im} f)^{(n)}.$$

Les règles et formules de dérivation d'une combinaison linéaire, d'un produit et d'un quotient de fonctions complexes sont les mêmes que celles du cas réel (théorème 29) et il en va de même pour la dérivation d'une composée avec $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $f[I] \subset J$.

Exemple 52

- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x+i}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, par quotient, de dérivée $x \mapsto -\frac{1}{(x+i)^2}$.
- Plus généralement, pour tous $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto (x-a)^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $x \mapsto n(x-a)^{n-1}$.
- Si f est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, il en va de même de $\bar{f}$ et on a $(\bar{f})' = \overline{f'}$.

La notion de monotonie et le signe de la dérivée n'ont évidemment plus de sens pour les fonctions complexes, en revanche on dispose toujours de la caractérisation des fonctions dérivables constantes sur un intervalle.

Théorème 53 – Caractérisation des fonctions dérivables constantes

Soit I un INTERVALLE de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$. La fonction f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I .

Démonstration. La fonction f est constante si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont. ■

Compétences à acquérir

- Étudier la monotonie d'une fonction : exercices 4 à 10.
- Traiter des questions de parité/périodicité : exercices 1 à 3 et 12.
- Étudier les extrema d'une fonction : exercice 8.
- Déterminer le domaine de définition/dérivabilité d'une fonction : exercices 7 et 11.
- Calculer les dérivées successives d'une fonction : exercice 13.
- Mettre en œuvre le théorème de la bijection continue : exercices 14 à 19.

Quelques résultats classiques :

- La réciproque d'une bijection impaire est une bijection impaire (exercice 15).

Démonstrations classiques : $\emptyset$