

3 | Ensembles et applications

Ce chapitre vise à introduire le vocabulaire ensembliste de base et la notion d'application.

1 Vocabulaires ensemblistes

Historiquement, la notion d'*ensemble* a été dégagée des notions d'*objet* et de *collection d'objets*, que nous considérerons comme intuitives[†]. Prosaïquement, les ensembles sont des sacs de billes dont les éléments sont les billes.

Définition 1 – Ensemble vide

L'unique ensemble ne comportant aucun élément est appelé *ensemble vide*. Il est noté $\emptyset$.

Dans l'immédiat, nous considérerons également comme intuitive la notion de *cardinal* d'un ensemble fini, à savoir le nombre d'éléments d'un ensemble fini X , noté $\text{Card}(X)$ ou $|X|$. Nous préciserons ce concept au chapitre « Dénombrément ».

1.1 Appartenance et inclusion

Pour tout ensemble E , la relation « x est un élément de E » (ou « x appartient à E ») est notée $x \in E$ (ou $E \ni x$) et sa négation s'écrit $x \notin E$ (ou $E \not\ni x$).

Un ensemble peut être défini notamment de deux manières : en *extension* ou en *compréhension*.

- Définir un ensemble en *extension* consiste à en donner la liste exhaustive et explicite de tous ses éléments. Cette liste est notée entre accolades et l'ordre des éléments listés est sans importance. Par exemple, $\{0, 1, 2\}$ est un ensemble, le même que $\{2, 0, 1\}$. Un ensemble de la forme $\{x\}$, constitué d'un seul élément, est appelé un *singleton*, tandis qu'un ensemble de la forme $\{x, y\}$ avec $x \neq y$, constitué de deux éléments, est appelé une *paire*. Notons qu'un ensemble ne peut pas contenir deux fois le même objet, ainsi $\{x, x\} = \{x\}$. Il est évident que l'on ne peut définir en extension que des ensembles FINIS, *i.e.* ayant un nombre fini d'éléments ; incapables que nous sommes d'écrire une liste infinie de symboles.
- Définir un ensemble en *compréhension* consiste à le définir par une propriété $\mathcal{P}$ vérifiée par ses seuls éléments. On note $\{x \mid \mathcal{P}(x)\}$ l'ensemble des objets qui satisfont la propriété $\mathcal{P}$. L'ensemble $\{x \mid x \in E \text{ et } \mathcal{P}(x)\}$ des éléments d'un ensemble E qui satisfont $\mathcal{P}$ est toutefois communément noté $\{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$. Pour un ensemble I , on note également $\{x_i\}_{i \in I}$ un ensemble d'objets *indexés par I* , *i.e.* obtenu en faisant « défiler » i dans I . Par exemple, $\{2^n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$.

Néanmoins, pour éviter toute confusion, précisons qu'il n'y a pas deux sortes d'ensembles en mathématiques, seulement plusieurs manières de les définir ! D'ailleurs un même ensemble peut être présenté en extension et en compréhension, *e.g.* $\{0, 1\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = n\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = x\}$.

Exemple 2 Nous avons déjà été confrontés à des ensembles définis en compréhension : les intervalles ! Par exemple, pour tous réels a et b , avec $a \leq b$, l'intervalle fermé $[a, b]$ est l'ensemble défini par compréhension $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, où la propriété $\mathcal{P}(x)$ est « $a \leq x \leq b$ », soit la conjonction des propriétés « $x \geq a$ » et « $x \leq b$ ».

Définition 3 – Égalité et inclusion

Soit E et F deux ensembles.

- Les ensembles E et F sont dits *égaux* lorsqu'ils ont exactement les mêmes éléments, *i.e.* lorsque

$$\forall x, \quad (x \in E \iff x \in F).$$

- On dit que E est *inclus dans* F , ou que F *contient* E , ou que E est une *partie de* F , ou encore que E est un *sous-ensemble de* F , ce que l'on note $E \subset F$ ou $F \supset E$, lorsque tout élément de E est élément de F , *i.e.* lorsque

$$\forall x, \quad (x \in E \implies x \in F).$$

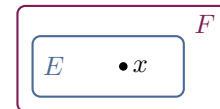
[†]. En toute rigueur, il est toutefois nécessaire de préciser certaines règles. Indiquons par exemple que considérer l'*ensemble de tous les ensembles* mène à une contradiction ! Ces règles font l'objet de *La théorie des ensembles*, dont l'étude dépasse largement notre propos.

Exemple 4 Pour tout ensemble E , on a $\emptyset \subset E$.

En effet, $\forall x, \underbrace{(x \in \emptyset \implies x \in E)}_{\text{Faux}} \overset{\text{Vrai}}{=} x \in E$.

Exemple 5 Soit E un ensemble et a un objet, alors on dispose de l'équivalence « $a \in E \iff \{a\} \subset E$ ».

✗ **ATTENTION !** ✗ Il est formellement interdit de confondre les notions d'appartenance et d'inclusion ! Ci-contre, il est vrai que $x \in E$, que $E \subset F$ et que $x \in F$, et on a donc aussi $\{x\} \subset E$ et $\{x\} \subset F$, mais en revanche $E \notin F$, $x \notin E$ et $x \notin F$.



Exemple 6 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, mais $\mathbb{N} \notin \mathbb{Z}$. Relativement à $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ est un sac dans un sac et non une bille dans un sac. Selon la même idée, $-1 \in \mathbb{Z}$, mais $-1 \notin \mathbb{Z}$. Relativement à $\mathbb{Z}$, -1 est une bille dans un sac et non un sac dans un sac.

Notation 7 Pour indiquer qu'une inclusion est stricte, i.e. $A \subset B$ et $A \neq B$, on peut écrire $A \subsetneq B$.

En pratique (Montrer une inclusion d'ensembles) Pour établir une inclusion d'ensembles $E \subset F$, on écrit SANS RÉFLÉCHIR :

« Si $x \in E$, montrons alors que $x \in F$.
 $\vdots$ } Preuve que $x \in F$.
 Ainsi $E \subset F$. »

Exemple 8 Vérifier que $\{x \in \mathbb{R} \mid x^4 = 4x - 2\} \subset \mathbb{R}_+$.

Pour établir l'égalité de deux ensembles, il est utile de noter l'équivalence évidente (principe de *double inclusion*) :

$$E = F \iff E \subset F \text{ et } F \subset E.$$

En pratique (Montrer une égalité d'ensembles) Pour établir une égalité d'ensembles $E = F$, il y a deux possibilités :

- Soit on raisonne par double inclusion, comme le suggère l'équivalence précédente.

« Si $x \in E$, montrons alors que $x \in F$.
 $\vdots$ } Preuve que $x \in F$.
 Ainsi $E \subset F$.
 Réciproquement, si $x \in F$, montrons alors que $x \in E$.
 $\vdots$ } Preuve que $x \in E$.
 Ainsi $F \subset E$ et finalement, par double inclusion, $E = F$. »

- Soit on raisonne directement par équivalence :

$$\text{« Pour tout } x : x \in E \iff \dots \iff \dots \iff x \in F. \text{ Ainsi } E = F. \text{ »}$$

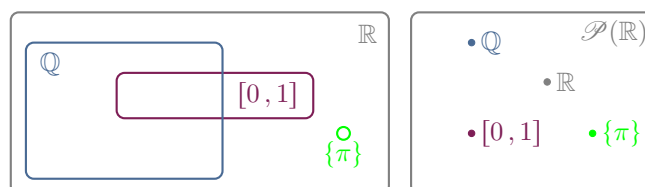
Définition 9 – Ensemble des parties d'un ensemble

L'ensemble des parties d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$. Il s'agit de l'ensemble formé de tous les sous-ensembles de E . Ainsi, pour tout ensemble A ,

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E.$$

Remarque 10

- Dire que A APPARTIENT À $\mathcal{P}(E)$ équivaut à dire que A est INCLUS DANS E . Il est ici particulièrement important de comprendre la différence entre appartenance et inclusion. La figure ci-contre illustre dans un cas particulier cette dualité : ce qui dans $\mathbb{R}$ apparaît comme une partie, apparaît dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ comme un élément, un « point ».



- Pour tout ensemble E , $E \in \mathcal{P}(E)$ et $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$. En effet $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$.

Exemple 11 Détailler $\mathcal{P}(E)$ dans les cas suivants :

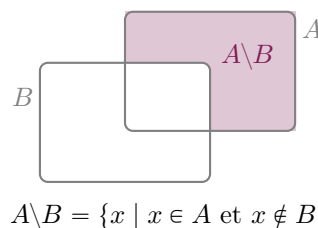
- a. $E = \{a\}$; b. $E = \{1, 2, 3\}$; c. $E = \emptyset$; d. $E = \{\emptyset\}$; e. $E = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Remarque 12 Si un ensemble E contient n éléments, avec $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{P}(E)$ en contient 2^n . Cette propriété, qui peut permettre de s'assurer qu'aucune partie n'a été oubliée, sera démontrée au chapitre « Dénombrement ».

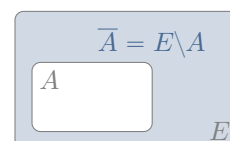
1.2 Opérations ensemblistes

Définition 13 – Différence, complémentaire

- Soit A et B deux ensembles.
On appelle *différence de B dans A* , notée $A \setminus B$, l'ensemble des x tels que : $x \in A$ et $x \notin B$.
- Soit E un ensemble et A une partie de E .
L'ensemble $E \setminus A$ est appelé *complémentaire de A dans E* et noté ${}_{\mathcal{C}_E}A$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté concernant E , il est aussi noté $\overline{A}$ ou A^c .



$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$$



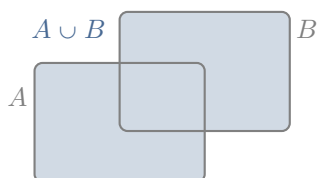
Exemple 14

- $\{1, 2, 4, 7, 8\} \setminus \{0, 2, 9\} = \{1, 4, 7, 8\}$. On a enlevé dans $\{1, 2, 4, 7, 8\}$ les éléments aussi présents dans $\{0, 2, 9\}$.
- $[1, 3] \setminus]2, 5] = [1, 2]$, $]2, 5] \setminus [1, 3] =]3, 5]$, $[2, 5] \setminus \{2\} =]2, 5]$.
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_- = \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}_- = \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^* = \mathbb{Z}_-$. Dans $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_-^*$ et $\overline{\mathbb{R}_-} = \mathbb{R}_+^*$.
- Soit A un ensemble, $A \setminus \emptyset = A$ et $A \setminus A = \emptyset$. Par ailleurs, si A est une partie d'un ensemble E , alors $\overline{\overline{A}} = A$.

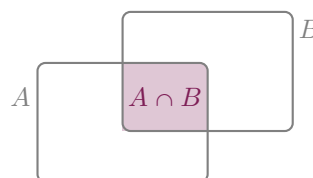
Définition 15 – Réunion, intersection

Soit A et B deux ensembles.

- On appelle *réunion* (ou *union*) de A et B , notée $A \cup B$, l'ensemble des x tels que : $x \in A$ OU $x \in B$.
- On appelle *intersection* de A et B , notée $A \cap B$, l'ensemble des x tels que : $x \in A$ ET $x \in B$.



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Ces définitions se généralisent à un nombre quelconque d'ensembles : soit I un ensemble et soit $\{A_i\}_{i \in I}$ un ensemble d'ensembles indexé par I , i.e. A_i est un ensemble, pour tout $i \in I$.

- On appelle *réunion* (ou *union*) des A_i , i décrivant I , notée $\bigcup_{i \in I} A_i$, l'ensemble défini comme $\{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$, i.e. l'ensemble des x tels que x est AU MOINS DANS L'UN des A_i .
- Si I est NON VIDE, on appelle *intersection* des A_i , i décrivant I , notée $\bigcap_{i \in I} A_i$, l'ensemble défini comme $\{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$, i.e. l'ensemble des x tels que x est DANS TOUS les A_i .

Exemple 16

- $[1, 3] \cup]2, 5] = [1, 5]$, $[1, 3] \cap]2, 5] =]2, 3]$, $[0, 1] \cap]2, 5] = \emptyset$, $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$.
- $\mathbb{R} \setminus]2, 5] =]-\infty, 2] \cup]5, +\infty[$, $\mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.
- Soit A un ensemble, $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- Si $\mathcal{R}$ désigne l'ensemble des rectangles et $\mathcal{L}$ l'ensemble des losanges, alors $\mathcal{R} \cap \mathcal{L}$ est l'ensemble des carrés.
- Le complémentaire de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ est $\overline{\mathbb{Z}} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[$.

Remarque 17 Par définition, pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Remarque 18 Reprenons les notations de la définition 15.

- Lorsque I est vide, $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$. En effet, l'assertion « $\exists i \in \emptyset, x \in A_i$ » est toujours fausse.
- L'assertion « $\forall i \in \emptyset, x \in A_i$ » est vraie pour tout x et n'est donc pas *collectivisante*. Il n'est donc pas légitime de considérer l'intersection d'une famille d'ensembles indexée par $\emptyset$. Toutefois, si $\{A_i\}_{i \in I}$ est un ensemble de parties d'un ensemble E , alors

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in \emptyset, x \in A_i\} = E.$$

Définition 19 – Ensembles disjoints

Deux ensembles sont dits *disjoints* lorsque leur intersection est vide.

Exemple 20

- Les parties $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ de $\mathbb{R}$ sont disjointes.
- Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, A et $\overline{A}$ sont disjoints.

Remarque 21 Lorsque deux ensembles A et B sont disjoints, l'union $A \cup B$ peut être notée $A \sqcup B$, afin d'indiquer le caractère disjoint des termes de l'union.

Théorème 22 – Propriétés de la réunion, de l'intersection et du passage au complémentaire

- **(Idempotence)** Pour tout ensemble A , $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$.
- **(Commutativité)** Les opérations $\cup$ et $\cap$ sont commutatives, *i.e.* pour deux ensembles A et B :

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{et} \quad A \cap B = B \cap A.$$

- **(Associativité)** Les opérations $\cup$ et $\cap$ sont associatives, *i.e.* pour trois ensembles A , B et C :

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C \quad \text{et} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

- **(Distributivité)** Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ un ensemble d'ensembles, avec I non vide, et B un ensemble, alors

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) \quad \text{et} \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B). \quad (1)$$

On pourra retenir que *l'intersection avec une union est l'union des intersections (et vice-versa)*.

- **(Lois de De Morgan)** Soit E un ensemble et $\{A_i\}_{i \in I}$ un ensemble de parties de E , alors

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}. \quad (2)$$

On pourra retenir que *le complémentaire d'une union est l'intersection des complémentaires (et vice-versa)*.

Démonstration. ... ■

Exemple 23 Dans $\mathbb{R}$, $\overline{[1, 3] \cap]2, 5]} = \overline{[1, 3] \cup]2, 5]} = \overline{[1, 5]} =]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[.$

Remarque 24 Il est intéressant d'observer les similarités entre

$\cup$ / ou / $\exists$	$\cap$ / et / $\forall$	$\overline{}$ / non	$\subset$ / $\implies$	$=$ / $\iff$	E / Vrai	$\emptyset$ / Faux
-------------------------	-------------------------	--------------------------------	------------------------	--------------	------------	--------------------

qui établissent un dictionnaire entre le vocabulaire ensembliste et celui de la logique. Par exemple, les formules suivantes sont similaires :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \text{non}(p \text{ ou } q) \equiv (\text{non } p) \text{ et } (\text{non } q).$$

Remarque 25 La différence ensembliste « $\setminus$ » n'est ni commutative ni associative.

Définition 26 – Produit cartésien[†]

Soit $E_1, \dots, E_n$ des ensembles. L'ensemble des n -uplets $(x_1, \dots, x_n)$ tels que $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$ est appelé le *produit (cartésien)[†]* de $E_1, \dots, E_n$ et est noté $E_1 \times \dots \times E_n$. Ainsi

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}.$$

Lorsque $E_1 = \dots = E_n = E$, ce produit est plutôt noté E^n .

Exemple 27

- Soit $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b\}$. $A \times B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$.
- $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels, *i.e.* l'ensemble des (x, y) avec $x, y \in \mathbb{R}$. On peut le représenter graphiquement comme un plan muni d'un repère, le couple (x, y) s'identifiant alors au point de coordonnées (x, y) .
- Plus généralement $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n -uplets de réels, *e.g.* $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

✗ ATTENTION ! ✗ Il est proscrit de confondre le n -UPLET $(x_1, \dots, x_n)$ avec l'ENSEMBLE $\{x_1, \dots, x_n\}$. Dans un ensemble les éléments ne sont pas ordonnés, alors que dans une famille l'ordre compte, *e.g.* $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$ mais $(1, 2, 3) \neq (3, 1, 2)$.

Remarque 28

- Rappelons que deux n -uplets $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont égaux si et seulement si $x_i = y_i$, pour tout $1 \leq i \leq n$.
- Il revient au même d'écrire « $\forall x \in E, \forall y \in F$ » et « $\forall (x, y) \in E \times F$ ». Enfin l'écriture « $\forall x, y \in E$ » n'est jamais qu'un raccourci acceptable pour « $\forall x \in E, \forall y \in E$ ».
- Le produit cartésien n'est pas une opération commutative.

1.3 Partitions d'un ensemble

Définition 29 – Recouvrement, partition

Soit E un ensemble.

- Un ensemble d'ensembles $\{A_i\}_{i \in I}$ dont la réunion contient E est appelé un *recouvrement* de E . Il est dit *disjoint* lorsque les ensembles A_i sont deux à deux disjoints.
- Un ensemble $\{A_i\}_{i \in I}$ de parties de E , *i.e.* un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$, est une *partition* de E lorsqu'il vérifie les trois conditions suivantes

$$(i) \forall i \in I, A_i \neq \emptyset; \quad (ii) \forall i, j \in I, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset; \quad (iii) \bigcup_{i \in I} A_i = E.$$

Une partition de E est donc un recouvrement disjoint par des parties non vides de E .



Une partition de E en 7 parties.

On peut rapprocher la notion de partition de celle de puzzle. Les ensembles A_i de la partition en sont les pièces et leur réunion forme l'image à reconstituer, *i.e.* l'ensemble E .

Remarque 30 Si $\{A_i\}_{i \in I}$ est une partition de E , alors l'assertion suivante est vraie : « $\forall x \in E, \exists ! i \in I, x \in A_i$ ».

Exemple 31

- L'ensemble $\{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}, \{6\}\}$ est une partition de $\llbracket 1, 6 \rrbracket$. En lien avec cet exemple, on peut par exemple noter $I = \{1, 2, 3\}$, $A_1 = \{1, 3\}$, $A_2 = \{2, 4, 5\}$ et $A_3 = \{6\}$.
- $\{[n, n+1[\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*, \{0\}\}$ sont des partitions de $\mathbb{R}$.
- L'ensemble $\{\{x\} \mid x \in E\}$ des singletons d'un ensemble E est une partition de E .
- Pour toute partie A d'un ensemble E , $\{A, \overline{A}\}$ est un recouvrement disjoint de E . À quelles conditions s'agit-il d'une partition de E ?

[†]. En l'honneur de René Descartes (1596 à La Haye-en-Touraine – 1650 à Stockholm), mathématicien, physicien et philosophe français, initiateur notamment de la *géométrie analytique*.

Formellement, on peut définir le couple (a, b) comme la paire $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, ce qui permet de définir le produit cartésien de deux ensembles $A \times B$, puis $A \times B \times C$ comme $(A \times B) \times C$, etc.

2 Généralités sur les applications

La section précédente a introduit la notion d'ensemble et un certain nombre de relations possibles entre ces derniers (inclusion, union, intersection, etc.). Nous allons maintenant étendre les possibilités pour mettre en relation deux ensembles avec la notion d'application.

Dans toute la suite de ce chapitre, $E, F, G, \dots$ désignent des ensembles quelconques.

2.1 Définition

Qu'est-ce qu'une application ? On se contente généralement d'énoncer que : « Une application associe à tout élément d'un ensemble un unique élément d'un autre ensemble », ce qui hélas n'est pas une définition.

Remarquons par exemple que la fonction numérique $x \mapsto x^2$ peut être vue comme l'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x, x^2) , x décrivant $\mathbb{R}$, autrement dit on peut assimiler cette fonction à son graphe, qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Avec la définition qui suit toute fonction est son graphe.

Définition 32 – Application, définition formelle (HP), graphe, image

- Une *application* (ou *fonction*)[†] f de E dans F est un triplet (E, F, G) tel que

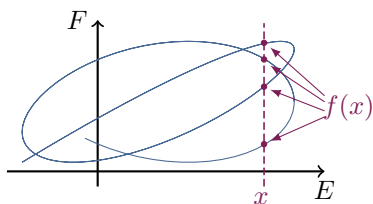
$$G \subset E \times F \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \quad \exists ! y \in F, \quad (x, y) \in G.$$

Le pseudo-quantificateur « $\exists !$ » permet de noter $f(x)$ l'unique élément y de F de l'assertion ci-dessus. On note alors

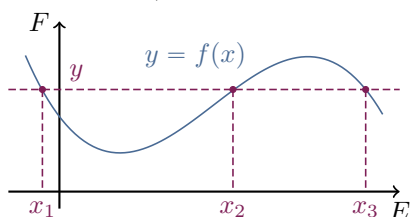
$$E \xrightarrow{f} F \quad \text{ou} \quad f : \begin{cases} E & \longrightarrow \\ x & \longmapsto f(x). \end{cases}$$

- L'ensemble E est appelé l'*ensemble de départ* (ou la *source* ou le *domaine*) de f . L'ensemble F est appelé l'*ensemble d'arrivée* (ou le *but* ou le *codomaine*) de f . L'ensemble $G = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ est quant à lui appelé le *graphe* de f .
- Pour tout $x \in E$, $f(x)$ est appelé l'*image* de x par f . Pour tout $y \in F$, tout élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$ est appelé un *antécédent* de y par f .
- On note F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F .

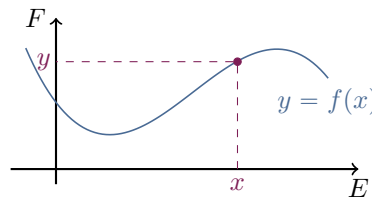
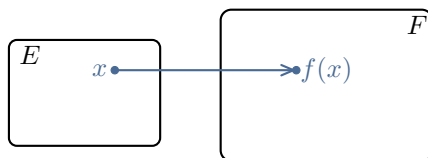
Exemple 33 Ainsi, formellement, la fonction carrée $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ x & \longmapsto x^2 \end{cases}$ est le triplet $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\})$.



On représente classiquement les applications de deux manières : au moyen de « patates » (figure de gauche) ou au moyen d'un graphe (figure de droite).



La figure ci-contre ne représente pas une fonction de E dans F , puisqu'à un x donné se trouvent associées plusieurs valeurs de $f(x)$.



Remarque 34

- Ci-contre, y possède plusieurs antécédents par f , c'est pourquoi on parle d'UN antécédent et non de L'antécédent de y .
- Attention à ne pas confondre F^E et E^F !

Exemple 35 Le sinus définit une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais aussi de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$. Ces deux applications, bien qu'ayant le même graphe, ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble d'arrivée.

[†]. Certains auteurs distinguent les notions de fonction et d'application. Conformément au programme, nous ne nous attarderons pas sur cette distinction, essentiellement sans intérêt.

Définition 36 – Restriction et prolongements

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B un ensemble contenant E .

- On appelle *restriction de f à A* , notée $f|_A$, l'application de A dans F définie par

$$\forall x \in A, \quad f|_A(x) = f(x).$$

- On appelle *prolongement de f à B* toute application g de B dans F telle que

$$\forall x \in E, \quad g(x) = f(x).$$

Ainsi g est un prolongement de f si et seulement si f est une restriction de g .

Restreindre une application consiste à diminuer la taille de son ensemble de définition, tandis que prolonger une application consiste à augmenter la taille de son ensemble de définition.

✗ ATTENTION ! ✗ Puisqu'il existe en général de nombreux prolongements d'une application donnée, on parle d'UN prolongement et non « du » prolongement d'une application.

Exemple 37 La fonction inverse f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ admet autant de prolongements à $\mathbb{R}$ que l'on peut attribuer d'images à 0, soit ici une infinité de possibilités.

Définition 38 – Famille

Soit I un ensemble. On appelle *famille (d'éléments) de E indexée par I* toute application de I dans E .

Pour les familles, on privilégie la notation indicielle $(x_i)_{i \in I}$, à la notation fonctionnelle $i \mapsto x(i)$. L'ensemble des familles de E indexées par I est naturellement noté E^I . On appelle *sous-famille* (resp. *sur-famille*) d'une famille d'éléments de E toute restriction (resp. tout prolongement) de l'application considérée.

Exemple 39

- Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ (ou n -uplet) d'éléments de E n'est rien d'autre que l'application x de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans E définie par les relations : $x(1) = x_1, \dots, x(n) = x_n$, qui associe à chaque position l'élément qui lui correspond.
- L'ensemble des suites réelles est l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, i.e. les familles de réels indexées par $\mathbb{N}$.

2.2 Image directe, image réciproque d'une partie**Définition 40 – Image directe d'une partie**

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- Pour toute partie A de E , on appelle *image (directe) de A par f* , notée $f[A]$, la partie de F suivante

$$f[A] = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, \quad y = f(x)\}.$$

- L'image de E tout entier est simplement appelée l'*image de f* et notée généralement $\text{Im } f$ plutôt que $f[E]$.

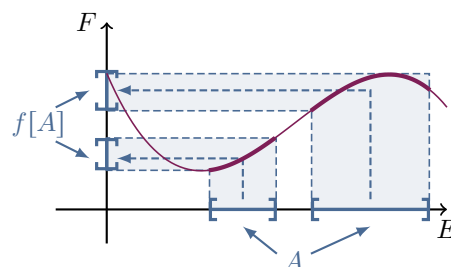
On définit ainsi une application $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ A & \longmapsto & f[A]. \end{array}$

L'image $f[A]$ de A par f est l'ensemble des images par f des éléments de A . Graphiquement, pour déterminer $f[A]$, on projette sur l'axe des ordonnées la portion du graphe de f qui se situe au-dessus de A .

Remarque 41 Une application $f : E \longrightarrow F$ est constante si et seulement si $f[E]$ est un singleton.

Exemple 42

- Soit $f \in F^E$. Alors $f[\emptyset] = \emptyset$ et, pour tout $x \in E$, $f[\{x\}] = \{f(x)\}$.
- L'image de $\mathbb{R}$ par la fonction $x \mapsto |x|$ est $\mathbb{R}_+$.
- L'image de $\pi\mathbb{Z}$ par la fonction $\sin$ est $\{0\}$, l'image de $[0, \pi]$ est $[0, 1]$, l'image de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est $[-1, 1]$ et l'image de $[0, 2\pi]$ est aussi $[-1, 1]$.



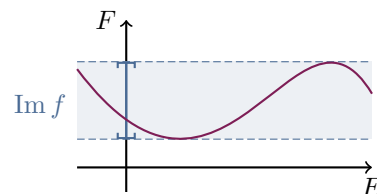
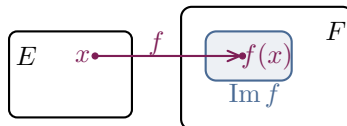
Définition 43 – Fonction « à valeurs dans... »

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et B une partie de F . On dit que f est à *valeurs dans* B lorsque toute valeur de f est élément de B , i.e.

$$\forall x \in E, \quad f(x) \in B \quad \text{ou, autrement dit,} \quad \text{Im } f \subset B.$$

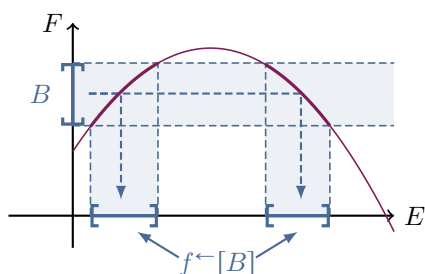
✗ ATTENTION ! ✗

En général, $\text{Im } f$ est plus petit que F !
Mais dire que « f est à valeurs dans B » ne signifie en aucune façon que $\text{Im } f = B$.

**Définition 44 – Image réciproque d'une partie**

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et B une partie de F . On appelle *image réciproque* de B par f , notée provisoirement $f^{-1}[B]$, la partie de E définie par

$$f^{-1}[B] = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$



On définit ainsi une application $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^{-1}[B]. \end{array} \right.$

L'image réciproque $f^{-1}[B]$ de B par f est l'ensemble des éléments de E dont les images par f appartiennent à B , autrement dit l'ensemble des antécédents des éléments de B . Graphiquement, pour déterminer $f^{-1}[B]$, on projette sur l'axe des abscisses les portions du graphe de f situées dans les tubes horizontaux définis par B .

Pour tout $x \in E$, $x \in f^{-1}[B] \iff f(x) \in B$.

Exemple 45 Soit $f : \{a, b, c, d\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ définie par $f(a) = 1, f(b) = 4$ et $f(c) = f(d) = 2$. Alors

$$f[\{a, b, c, d\}] = f[\{a, b, c\}] = \{1, 2, 4\}, \quad f^{-1}[\{2\}] = \{c, d\}, \quad f^{-1}[\{1\}] = f^{-1}[\{1, 5\}] = \{a\} \quad \text{et} \quad f^{-1}[\{3, 5\}] = \emptyset.$$

En pratique Pour une fonction numérique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, chercher l'image réciproque d'un singleton $\{y\}$ par f revient à résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x , tandis que chercher l'image réciproque d'un intervalle $[a, b]$ revient à résoudre l'inéquation $a \leq f(x) \leq b$.

Exemple 46

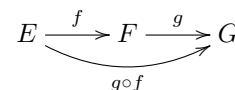
- L'image réciproque de $\{1\}$ par la fonction sinus est $\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$ (équation $\sin x = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$). L'image réciproque de $[2, 3]$ est vide (inéquation $2 \leq \sin x \leq 3$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$).
- L'image réciproque de $[4, +\infty[$ par la fonction carrée est $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ (inéquation $x^2 \geq 4$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$).

Remarque 47 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. L'ensemble $\{f^{-1}[\{y\}] \mid y \in F\}$ est un recouvrement disjoint de E . En particulier, $f^{-1}[F] = E$.

Remarque 48 Notons que l'image directe d'un sous-ensemble de l'ensemble de départ est un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée, tandis que l'image réciproque d'un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée est un sous-ensemble de l'ensemble de départ.

2.3 Composition d'applications**Définition 49 – Composition**

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. L'application $E \longrightarrow G, x \longmapsto g(f(x))$ est appelée *composée de f suivie de g* et notée $g \circ f$.



Remarque 50 Pour former la composée $g \circ f$, il est impératif que l'ensemble d'arrivée de f , ou du moins l'image de f , soit inclus dans l'ensemble de départ de g .

Définition 51 – Identité

On appelle *identité* de E , notée Id_E , l'application $x \mapsto x$ de E dans E .

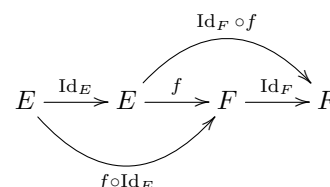
Théorème 52 – Propriétés de la composition

Soit $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$ trois applications.

- **Associativité.** $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, ce qui permet d'écrire sans ambiguïté $h \circ g \circ f$.
- **Neutralité de l'identité.** $\text{Id}_F \circ f = f \circ \text{Id}_E = f$.
- **Image d'une composée.** $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$.

Démonstration. ...

Lorsque l'on compose une application $f : E \rightarrow F$ à gauche ou à droite par l'identité, il faut pouvoir déterminer correctement relativement à quel ensemble. Autrement dit répondre aux interrogations $\text{Id}_? \circ f$ et $f \circ \text{Id}_?$. Pour cela, rien de mieux qu'un dessin !



✗ **ATTENTION ! ✗** En général, la composition de deux applications n'est possible que dans un seul sens et, lorsqu'elle peut avoir lieu dans les deux sens, il n'y a aucune raison d'avoir $g \circ f = f \circ g$ (autrement dit l'opération de composition $\circ$ n'est pas commutative), e.g. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$.

2.4 Fonction indicatrice (ou caractéristique)

On peut associer à tout sous-ensemble d'un ensemble E une fonction de E dans $\{0, 1\}$, association qui s'avérera fructueuse.

Définition 53 – Fonction indicatrice (ou caractéristique) d'un ensemble

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E . La *fonction indicatrice (ou caractéristique)* de A , notée $\mathbb{1}_A$ (ou χ_A), est la fonction de E dans $\{0, 1\}$ définie par

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 54 $\mathbb{1}_E = 1$ et $\mathbb{1}_\emptyset = 0$ (fonctions constantes égales à 1 et 0 respectivement sur E).

Remarque 55 Les fonctions indicatrices sont à valeurs dans $\{0, 1\}$, ainsi $(\mathbb{1}_A)^n = \mathbb{1}_A$, pour tous $A \in \mathcal{P}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

✗ **ATTENTION ! ✗** Le produit n'est pas intègre dans l'ensemble $\{0, 1\}^E$ des fonctions indicatrices sur E , i.e. on peut avoir $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = 0$, sans avoir $\mathbb{1}_A = 0$ ou $\mathbb{1}_B = 0$.

Les opérations ensemblistes usuelles se transcrivent au niveau des fonctions indicatrices.

Théorème 56 – Propriétés des fonctions indicatrices

Soit E un ensemble et A et B des parties de E .

- (i) $A = \mathbb{1}_A^{-1}[\{1\}]$. (ii) $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$. (iii) $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$. (iv) $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

En particulier, $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$.

Démonstration. ...

Dans la pratique, pour démontrer que deux ensembles de E sont égaux, on peut utiliser le corollaire suivant, qui découle directement du point (i) précédent.

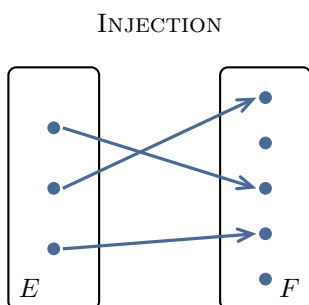
Corollaire 57

Deux sous-ensembles de E sont égaux si et seulement s'ils ont la même fonction indicatrice.

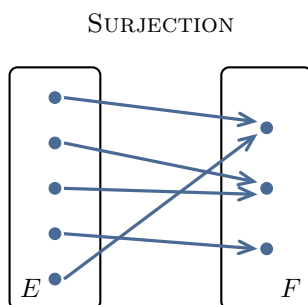
Exemple 58 Démontrer une des lois de De Morgan à l'aide des fonctions indicatrices.

3 Injections, surjections, bijections

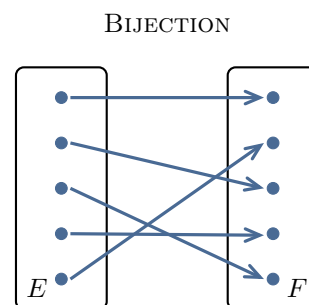
Dans cette section, pour une application donnée $f : E \longrightarrow F$, on s'intéresse au nombre d'antécédents par f d'un élément quelconque de F . Précisément, nous distinguerons les trois situations singulières suivantes pour f :



Des éléments distincts au départ ont des images distinctes.



Tous les éléments de F ont au moins un antécédent par f dans E .



Chaque élément de F a exactement un antécédent dans E par f , qui établit ainsi une correspondance entre les éléments de E et ceux de F .

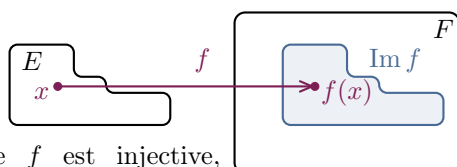
3.1 Injections

Définition 59 – Injection

Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est dite *injective sur E* ou est appelée une *injection sur E* lorsque

$$\forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Ainsi, une application injective est une application par laquelle on peut « SIMPLIFIER », *i.e.* lorsque $f(x) = f(x')$, alors en fait $x = x'$.



Lorsque f est injective, $\text{Im } f$ s'apparente à une copie de E à l'intérieur de F .

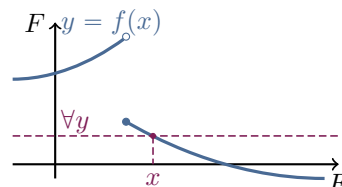
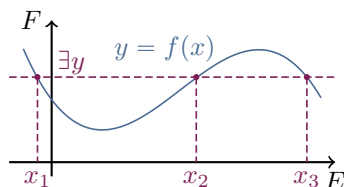
La notion d'injectivité se comprend aussi clairement en contraposant sa définition :

$$\forall x, x' \in E, \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x'),$$

autrement dit une application est injective lorsqu'elle donne des valeurs différentes à des points différents. Ainsi, puisque f distingue à l'arrivée les éléments qui sont distincts au départ, l'image de f est telle une copie de E à l'intérieur de F .

Il est aussi commode de penser l'injectivité en termes d'antécédents. L'application f est injective lorsque tout élément de F possède AU PLUS UN antécédent par f , *i.e.* soit zéro, soit un antécédent. Les éléments de F ne possédant aucun antécédent par f sont alors exactement ceux de $F \setminus \text{Im } f$.

f n'est pas injective, CERTAINS y ayant plusieurs antécédents.



f est injective, AUCUN y n'ayant plusieurs antécédents, certains même n'en ont pas.

Formulée en termes d'équations, $f : E \longrightarrow F$ est une injection si et seulement si, pour tout élément $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet AU PLUS UNE solution dans E .

Exemple 60

- La fonction carrée n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, mais ses restrictions à $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_-$ le sont. Il est donc crucial de porter une attention particulière au domaine de départ dans l'étude de l'injectivité.
- La fonction $z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$ est injective sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.
- Soit $A \subset E$. L'injection canonique $\iota : A \longrightarrow E, x \mapsto x$ est... injective !

Théorème 61 – Injectivité et composition

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

- (i) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi. (ii) Si $g \circ f$ est injective, alors f l'est aussi.

Principe de démonstration. Il suffit de revenir aux définitions. ■

✗ **ATTENTION ! ✗** Dans l'assertion (ii), g n'a aucune raison d'être injective en revanche. On peut par exemple penser aux fonctions $x \xrightarrow{f} e^x$ et $x \xrightarrow{g} x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 62 – Injectivité et stricte monotonie

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est strictement monotone sur A , alors f est injective.

Démonstration. ... ■

✗ **ATTENTION ! ✗** La réciproque est fausse en général, comme le montre le graphe de la fonction injective représentée un peu plus haut. Cette fonction est injective sans être monotone, mais du coup elle n'est pas continue. Nous verrons ultérieurement en effet qu'une fonction injective et continue sur un intervalle y est toujours strictement monotone.

Exemple 63

- La fonction exponentielle et la fonction logarithme népérien sont injectives respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$, car strictement croissantes sur ces intervalles.
- La fonction cos est injective sur $[0, \pi]$, car strictement décroissante sur cet intervalle (de même sur $[\pi, 2\pi]$ ou $[-\pi, 0]$).

3.2 Surjections**Définition 64 – Surjection**

Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est dite *surjective de E sur F* ou est appelée une *surjection de E sur F* lorsque

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad y = f(x),$$

ce qui équivaut à dire que $\text{Im } f = F$.

Ainsi, l'application f est surjective lorsque, pour tout élément y de F , l'équation $y = f(x)$ admet AU MOINS UNE solution dans E , ou encore lorsque tout élément de son ensemble d'arrivée F admet AU MOINS UN antécédent dans E par f .

Remarque 65 – Dans vs Sur Quand on dit qu'une application f est définie de E DANS F ou qu'elle est À VALEURS DANS F , cela signifie que F en est un ensemble d'arrivée, *i.e.* que les valeurs de f sont DES éléments de F , autrement dit tout élément de F n'est pas atteint a priori.

Pour la surjectivité, on ne dit pas que f est surjective de E « dans » F , mais bien qu'elle est surjective de E SUR F , car f atteint alors tous les éléments de F et en ce sens E « couvre » F . Cette idée de « couverture » justifie l'emploi de la préposition « sur ».

Observons enfin que, par définition, tout élément de $\text{Im } f$ possède un antécédent par f , autrement dit

Toute application est surjective de son ensemble de définition sur son image.

Exemple 66

- La fonction carrée n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, en revanche elle l'est de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}_+$. À l'instar de l'injectivité, il est crucial de porter une attention particulière aux domaines de départ et d'arrivée dans l'étude de la surjectivité.
- Les *projections canoniques* $p_E : E \times F \longrightarrow E, (x, y) \longmapsto x$ et $p_F : E \times F \longrightarrow F, (x, y) \longmapsto y$ sont surjectives, lorsque E et F sont des ensembles non vides.

Remarque 67 Si l'application $f : E \longrightarrow F$ est surjective, alors l'ensemble $\{f^{\leftarrow}[\{y\}] \mid y \in F\}$ est une partition de E (cf. la remarque 47).

Théorème 68 – Surjectivité et composition

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

- (i) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi. (ii) Si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est aussi.

Principe de démonstration. Il suffit de revenir aux définitions. ■

✗ **ATTENTION ! ✗** Dans l'assertion (ii), f n'a aucune raison d'être surjective en revanche. On peut par exemple penser aux fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*, x \longmapsto e^x$ et $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto x^2$.

3.3 Bijections

Définition 69 – Bijection

Pour une application $f : E \longrightarrow F$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est injective et surjective de E sur F . (ii) $\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)$.

Le cas échéant, f est dite *bijection de E sur F* ou est appelée une *bijection de E sur F* .

Formulée en termes d'équations, la définition précédente indique qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est une bijection si et seulement si, pour tout élément $y \in F$ fixé, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet une et une seule solution dans E . La situation se résume ainsi :

f est injective sur E si et seulement si tout élément de F possède AU PLUS UN ANTÉCÉDENT dans E par f .
 f est surjective de E sur F si et seulement si tout élément de F possède AU MOINS UN ANTÉCÉDENT dans E par f .
 f est bijective de E sur F si et seulement si tout élément de F possède UN ET UN SEUL ANTÉCÉDENT dans E par f .

Exercice 70 L'identité Id_E est une bijection de E sur E .

En effet, pour tout $y \in E$, l'unique antécédent de y par Id_E est y !

Définition 71 – Réciproque

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On appelle *réciproque de f* toute application $g : F \longrightarrow E$ pour laquelle

$$g \circ f = \text{Id}_E \quad \text{ET} \quad f \circ g = \text{Id}_F.$$

Les identités « $\forall x \in E, g \circ f(x) = x$ » et « $\forall y \in F, f \circ g(y) = y$ » expriment l'idée que g annule le travail de f et inversement.

Théorème 72 – Bijectivité et réciproque

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

f est bijective de E sur F si et seulement si f admet une réciproque.

Une telle réciproque est alors unique, appelée LA réciproque de f et notée f^{-1} , et vérifie

$$\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

L'application réciproque d'une application bijective $f : E \longrightarrow F$ s'obtient donc comme l'unique application

$$f^{-1} : F \longrightarrow E, y \longmapsto \text{l'unique antécédent } x \text{ de } y \text{ par } f.$$

Démonstration.

- Si f admet une réciproque g , montrons que f est bijective. Par définition, $g \circ f = \text{Id}_E$, or Id_E est bijective, donc injective et f l'est alors également (théorème 61). On montre de même que f est surjective en exploitant la relation $f \circ g = \text{Id}_F$.
- Supposons f bijective de E sur F et montrons qu'elle admet une unique réciproque en raisonnant par analyse-synthèse.
 - × **Analyse.** Si g est une réciproque de f , alors, pour tout $y \in F$, en notant x l'unique antécédent de y par f dans E , il vient $x = \text{Id}_E(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y)$. g est donc nécessairement l'application

$$g : F \longrightarrow E, y \longmapsto \text{l'unique antécédent } x \text{ de } y \text{ par } f.$$

× **Synthèse.** On vérifie sans difficulté que l'application décrite précédemment convient. En effet :

- pour tout $y \in F$, par définition de g , $y = f(g(y))$, autrement dit $f \circ g = \text{Id}_F$;
- pour tout $x \in E$, $g(f(x))$ est par définition de g l'unique antécédent de $f(x)$ par f , or x est justement un tel antécédent, donc $x = g(f(x))$, par unicité. Autrement dit $g \circ f = \text{Id}_E$. ■

Exemple 73 – Involution Soit $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f = \text{Id}_E$, alors f est une bijection de E sur E et sa propre réciproque, i.e. $f^{-1} = f$. Une telle fonction f est appelée une *involution de E* .

La fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$. L'application $z \longmapsto \bar{z}$ est une involution de $\mathbb{C}$. Le passage au complémentaire $A \longmapsto \bar{A}$ est une involution de $\mathcal{P}(E)$.

 **En pratique**  **Bijektivité d'une application.** Pour établir qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective, on peut procéder selon l'ordre de priorité suivant.

1. Si l'on connaît a priori une expression explicite de f^{-1} , on appelle g cette fonction et on vérifie simplement que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.
2. Sinon, on peut essayer de déterminer l'expression de f^{-1} , en résolvant l'équation $y = f(x)$, ce qui aboutit à $x = f^{-1}(y)$.
3. Si l'obtention de l'expression de f^{-1} semble hors de portée, on se contente de montrer successivement que f est injective et surjective.

Dans les deux premiers cas, outre la bijectivité de f , on obtient également l'expression de sa réciproque.

Exemple 74 L'application $x \xrightarrow{f} x + \sqrt{x^2 + 1}$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de réciproque $y \longmapsto \frac{y^2 - 1}{2y}$.

Exemple 75 L'application $\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \{0, 1\}^E \\ A & \longmapsto & \mathbf{1}_A \end{cases}$ est une bijection.

Théorème 76 – Bijektivité, réciproque et composition

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

- (i) Si f est bijective de E sur F , alors f^{-1} est bijective de F sur E et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- (ii) Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ l'est aussi et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Principe de démonstration. Exploiter la caractérisation donnée par le théorème 72. ■

⚠ ATTENTION ! ⚠ Soyez attentif à l'ordre ! On a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ et NON $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Si vous enfiler vos chaussettes (f) puis vos chaussures (g), pour vous déchausser (défaire $g \circ f$), vous devez d'abord ôter vos chaussures (g^{-1}) puis vos chaussettes (f^{-1}), soit la composée $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Remarque 77 La réciproque du point (ii) du théorème précédent est seulement partielle. Précisément, avec les notations du théorème, si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective (sur E) et g est surjective (de F sur G), implication qui découle directement des points (ii) des théorèmes 61 et 68 (cf. exercice 22 pour un contre-exemple).

Pour conclure essentiellement sur ces questions, nous admettons temporairement le théorème suivant qui sera démontré au chapitre *Dénombrement*.

Théorème 78 – Caractérisation des bijections entre deux ensembles finis de même cardinal

Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. Si E et F sont des ensembles FINIS DE MÊME CARDINAL, on dispose alors des équivalences

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective.}$$

Théorème 79 – Bijektivité et image réciproque

Si f est une bijection de E sur F et B une partie de F , alors

$$f^{\leftarrow}[B] = f^{-1}[B],$$

où $f^{\leftarrow}[B]$ est l'image RÉCIPROQUE de B par f et $f^{-1}[B]$ l'image DIRECTE de B par la réciproque f^{-1} .

Démonstration. Pour tout $x \in E$, on dispose des équivalences

$$x \in f^{-1}[B] \iff \exists b \in B, \quad x = f^{-1}(b) \iff \exists b \in B, \quad f(x) = b \iff f(x) \in B \iff x \in f^{\leftarrow}[B].$$

✗ ATTENTION ! ✗ Ce théorème justifie que l'on notera dorénavant toujours $f^{-1}[B]$ plutôt que $f^{\leftarrow}[B]$ l'image réciproque de B par f . La notation $f^{\leftarrow}[B]$ n'est pas utilisée en pratique, elle a seulement été introduite dans un premier temps pour ne pas nous embrouiller.

- Dans le cas où f est bijective, la confusion des notations $f^{-1}[B]$ et $f^{\leftarrow}[B]$ n'est pas gênante, puisqu'elles représentent le même objet.
- Et dans le cas où f n'est pas bijective ? f^{-1} n'est pas définie de toute façon ! La notation $f^{-1}[B]$ ne donne donc lieu à aucune ambiguïté.

En guise de conclusion :

La notation $f^{-1}[B]$ NE REQUIERT PAS la bijectivité de f !

Exemple 80 La fonction cosinus n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, elle n'est donc pas a fortiori bijective et il est donc illégitime d'écrire $\cos^{-1}(1)$. En revanche, on peut considérer $\cos^{-1}[\{1\}]$, en l'occurrence $\cos^{-1}[\{1\}] = 2\pi\mathbb{Z}$.

Par ailleurs, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$ induit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, il devient alors légitime d'écrire $\cos_{[0, \pi]}^{-1}(1)$, en l'occurrence $\cos_{[0, \pi]}^{-1}(1) = 0$, et on a aussi $\cos_{[0, \pi]}^{-1}[\{1\}] = \{0\}$.

Remarque 81 – Changement d'indice dans une somme/un produit

En toute généralité, la formule de changement

d'indice dans une somme (ou un produit) s'énonce ainsi :

Soit I et J deux ensembles finis. Si $f : I \longrightarrow J$ est une bijection de I sur J , alors, pour toute famille $(a_j)_{j \in J}$ de nombres complexes, $\sum_{i \in I} a_{f(i)} = \sum_{j \in J} a_j$, ce qui correspond au changement d'indice $j = f(i)$.

Cette formule ne fait que traduire le fait que lorsque i parcourt l'ensemble I , les $f(i)$ prennent une et une seule fois chaque valeur j de l'ensemble J , du fait de la bijectivité de f .

En particulier, si f est une bijection de I sur lui-même, alors $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_{f(i)}$.

Les changements d'indices indiqués au paragraphe 5.2 du chapitre 1 vérifient évidemment cette propriété.

Par exemple, pour tout $c \in \mathbb{Z}$, le changement d'indice $j = i + c$, soit $i = j - c$, menant à

$$\sum_{j=m}^n a_j = \sum_{i=m-c}^{n-c} a_{i+c},$$

correspond à la bijection $f : i \longmapsto i + c$ de $\llbracket m - c, n - c \rrbracket$ sur $\llbracket m, n \rrbracket$.

Remarque 82 – Sommes et partitions

En toute généralité, si I est un ensemble fini non vide, si $(I_k)_{k \in K}$ est une partition de I et si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres complexes, alors

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i.$$

Par exemple, si $I = \llbracket 0, n \rrbracket$, avec $n \in \mathbb{N}$, alors les deux ensembles $I_0 = I \cap 2\mathbb{N}$ (entiers pairs de $\llbracket 0, n \rrbracket$) et $I_1 = I \cap (2\mathbb{N} + 1)$ (entiers impairs de $\llbracket 0, n \rrbracket$) forment une partition de I et, pour toute famille $(a_i)_{i \in I}$ de nombres complexes, on a

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I_0} a_i + \sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} a_{2k+1}.$$

Compétences à acquérir

- Savoir établir une inclusion/égalité d'ensembles : exercices 3, 4, 8 et 12 à 14.
- Maîtriser les définitions et les propriétés des opérations ensemblistes : exercices 2 à 7, 9 et 23.
- Maîtriser la notion d'ensemble des parties d'un ensemble : exercices 11 à 14.
- Savoir déterminer les antécédents par une application, l'image (réciproque) d'une partie par une application : exercices 17 à 19.
- Savoir montrer qu'une application est injective/surjective/bijjective : exercices 20, 21, 24 à 29.
- Déterminer la réciproque d'une bijection : exercice 20.

Quelques résultats classiques :

- Bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et $\{0,1\}^E$ (exemple 75).
- $\mathcal{P}(E)$ et inclusion (exercice 14).
- Image directe/réciproque et opérations ensemblistes (exercice 23).
- (Il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$ (exercice 33).)

Démonstrations classiques :

- Injectivité et composition (théorème 61).
- Surjectivité et composition (théorème 68).
- Bijectivité, réciproque et composition (théorème 76).