

Dans l'ensemble de ce chapitre, E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel.

1 Produits scalaires



1.1 Définition et exemples

Définition 1 – Produit scalaire, espace préhilbertien, espace euclidien

- On appelle *produit scalaire sur E* toute forme bilinéaire symétrique définie positive sur E , i.e. toute application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant
 - (i) *Linéarité à gauche.* $\forall x, x', y \in E, \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda x + \lambda' x', y) = \lambda \varphi(x, y) + \lambda' \varphi(x', y);$
 - (ii) *Linéarité à droite.* $\forall x, y, y' \in E, \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \varphi(x, \lambda y + \lambda' y') = \lambda \varphi(x, y) + \lambda' \varphi(x, y');$
 - (iii) *Symétrie.* $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x);$
 - (iv) *Caractère défini.* $\forall x \in E, (\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0_E);$
 - (v) *Positivité.* $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0.$
- } *Bilinéarité*
- Un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un *espace préhilbertien[†] réel*. Un espace préhilbertien réel DE DIMENSION FINIE est appelé un *espace euclidien[‡]*.

Remarque 2

- Si φ est une application bilinéaire sur E , alors $\forall x \in E, \varphi(x, 0_E) = \varphi(0_E, x) = 0$.
- Contrairement à la présentation qui vous en a certainement été donnée au lycée, où le produit scalaire sur \mathbb{R}^2 est défini à partir des notions d'angle et de norme ($\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$), la notion de produit scalaire est ici première et ce sont celles de norme et d'angle qui en découlent.
- Le réel $\varphi(x, y)$ est souvent noté $\langle x, y \rangle$, $(x | y)$ ou $x \cdot y$.

 **En pratique**  Pour établir la bilinéarité d'une application, la linéarité par rapport à une variable seulement est suffisante, à condition d'avoir démontré la symétrie auparavant.

Exemple 3 Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $(X, Y) \longmapsto X^T A Y$ est une forme bilinéaire sur \mathbb{R}^n . Cette dernière est symétrique si et seulement si la matrice A l'est.

Définition-théorème 4 – Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

- L'application $(X, Y) \longmapsto X^T Y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n , appelé *produit scalaire canonique*.
- L'application $(A, B) \longmapsto \text{tr}(A^T B) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} A_{i,j} B_{i,j}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelé *produit scalaire canonique*.

Démonstration. ... ■

†. David Hilbert (1862 à Königsberg – 1943 à Göttingen) est un mathématicien allemand. Il a créé ou développé un large éventail d'idées fondamentales, que ce soit la théorie des invariants, l'axiomatisation de la géométrie euclidienne ou les fondements de l'analyse fonctionnelle (espaces de Hilbert).

‡. Euclide (≈ 300 av. J.-C.) est un mathématicien de la Grèce antique, auteur d'un traité de mathématiques qui constitue l'un des textes fondateurs de cette discipline en Occident : *Les Éléments*. Il s'agit d'un des plus anciens traités connus présentant de manière systématique, à partir d'axiomes et de postulats, un large ensemble de théorèmes accompagnés de leurs démonstrations. *Les Éléments* porte sur la géométrie, tant plane que solide, et l'arithmétique théorique.

Remarque 5

- On retrouve ici le produit scalaire usuel du plan \mathbb{R}^2 , pour lequel, pour tous vecteurs $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{u}' = (x', y')$ de \mathbb{R}^2 , $\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy'$.
- Le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n est un cas particulier du produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ obtenu pour $p = 1$. En effet, lorsque A et B sont des matrices colonnes à n lignes, elles s'identifient à des éléments de \mathbb{R}^n et le produit $A^\top B$ est une matrice carrée de taille 1 qui s'identifient donc à un réel et à sa trace.

✗ ATTENTION ! ✗ Il peut exister de nombreux produits scalaires sur un même \mathbb{R} -espace vectoriel. Par exemple, $\phi : ((x, y), (x', y')) \mapsto 2xx' + xy' + x'y + 2yy'$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 , distinct du produit scalaire canonique. **En effet**, la symétrie et la bilinéarité sont évidentes, en remarquant notamment que

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad \phi((x, y), (x', y')) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

En outre, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\phi((x, y), (x, y)) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = x^2 + y^2 + (x + y)^2 \geq 0$$

et si $\phi((x, y), (x, y)) = 0$, alors $x = y = x + y = 0$ et donc $(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Exemple 6 – Produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ Soit $a < b$ deux réels et $\omega \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}_+^*)$.

L'application $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\omega(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Muni de ce produit scalaire, $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est un espace préhilbertien, mais n'est pas un espace euclidien, car $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension infini.

Exemple 7 Avec les notations précédentes, $(P, Q) \mapsto \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 8 Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts. L'application $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 9 L'application $\phi : ((x, y), (x', y')) \mapsto 2xx' - 3xy' - 3x'y + yy'$ est une forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^2 qui n'est pas un produit scalaire.

En effet, pour tous $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, $\phi((x, y), (x', y')) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, ce qui établit la symétrie et la bilinéarité. Par ailleurs, ϕ n'est pas positive, puisque $\phi((1, 1), (1, 1)) = -3 < 0$.

1.2 Norme et distance associées à un produit scalaire

Définition 10 – Norme et distance associées à un produit scalaire.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

- On appelle *norme (euclidienne) sur E associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$* l'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in E$, par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.
- Un vecteur $x \in E$ est dit *unitaire* lorsque $\|x\| = 1$.
- On appelle *distance (euclidienne) sur E associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$* l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tous $x, y \in E$, par $d(x, y) = \|x - y\|$.

Remarque 11 Vous introduirez en seconde année les notions générales de norme et de distance. Précisément,

On appelle *distance* sur un ensemble E toute application $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant

- (i) $\forall (x, y) \in E^2, \quad d(y, x) = d(x, y);$
- (ii) $\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y;$
- (iii) $\forall (x, y, z) \in E^3, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

On appelle *norme* sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant

- (i) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad N(\lambda x) = |\lambda|N(x);$
- (ii) $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \iff x = 0_E;$
- (iii) $\forall (x, y) \in E^2, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y).$

On vérifie alors que les applications $\|\cdot\|$ et d définies à la définition 10 sont respectivement une norme et une distance sur l'espace préhilbertien E (cf. exercice 2) et vérifient donc les propriétés (i) à (iii) indiquées ci-dessus.

Définition-théorème 12 – Identités de polarisation

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Pour tous $x, y \in E$,

- (i) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$;
- (ii) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$;
- (iii) $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x, y \rangle$;
- (iv) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Les relations (i) à (iii) sont appelées *identités de polarisation* et la relation (iv) est dite *égalité du parallélogramme*.

Démonstration. ...

Remarque 13 – Développement du carré d'une norme Plus généralement, pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$,

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle x_i, x_j \rangle.$$

La norme euclidienne d'un espace préhilbertien réel a été définie à partir du produit scalaire. Réciproquement, les identités de polarisation montrent que le produit scalaire peut être reconstruit à partir de la norme euclidienne.

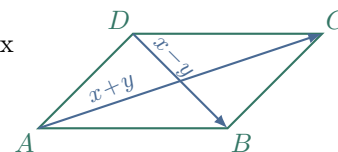
Exemple 14 L'application $N : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + 2xy + 3y^2}$ est une norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 .

En effet, en lien avec la troisième identité de polarisation, considérons

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad S((x, y), (x', y')) = \frac{N(x + x', y + y')^2 - N(x - y, x' - y')^2}{4} = xx' + xy' + yx' + 3yy',$$

on vérifie alors que S est un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 et $N(x, y) = \sqrt{S((x, y), (x, y))}$ est donc la norme euclidienne associée.

Exemple 15 Dans un parallélogramme $ABCD$, la somme des carrés des longueurs des deux diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés.



En effet, conséquence directe de l'égalité du parallélogramme avec $x = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $y = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Exemple 16 – Loi des cosinus ou Théorème d'Al-Kashi Dans un triangle ABC , la première identité de polarisation donne

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

Égalité qui généralise la relation métrique du théorème de Pythagore pour un triangle quelconque.

Théorème 17 – Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $x, y \in E$.

(i) **Inégalité de Cauchy-Schwarz**† $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$, avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

(ii) **Inégalité triangulaire (version norme)**. $\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

L'inégalité de droite est une égalité si et seulement si x et y sont colinéaires et DE MÊME SENS.

Démonstration. ...

Exemple 18 Pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$, avec égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$.

En effet, il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs (x_1, \dots, x_n) et $(1, \dots, 1)$ de \mathbb{R}^n pour le produit scalaire canonique.

†. Augustin Louis, baron Cauchy (Paris 1789 – Sceaux 1857) est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Il introduit en analyse les fonctions holomorphes et des critères de convergence des suites et des séries entières. Ses travaux sur les permutations sont précurseurs de la théorie des groupes.

Hermann Amandus Schwarz (1843 à Hermsdorf – 1921 à Berlin) est un mathématicien allemand. Ses travaux sont marqués par une forte interaction entre l'analyse et la géométrie avec des contributions en géométrie différentielle et au calcul des variations.

Exemple 19 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Pour tous $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, $|f(b)^2 - f(a)^2| \leq 2\sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b f'(t)^2 dt}$.

En effet, appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à f et f' dans l'espace préhilbertien réel $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(u, v) \mapsto \int_a^b u(t)v(t) dt$ (cf. exemple 6) :



$$\left| \int_a^b f(t)f'(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b f'(t)^2 dt}.$$

On conclut alors en calculant simplement l'intégrale du membre de gauche.

Exemple 20 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Pour tous $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$,

$$\sqrt{\int_a^b (f(t) + g(t))^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} + \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}.$$

En effet, il s'agit seulement de l'inégalité triangulaire $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ écrite pour le produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

 **En pratique**  Dorénavant, lorsqu'il vous sera demandé d'établir des inégalités faisant intervenir des sommes/intégrales et des carrés, il sera souvent utile de penser aux inégalités du théorème 17.

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs orthogonaux, familles orthogonales/orthonormales

Définition 21 – Vecteurs orthogonaux, famille orthogonale/orthonormale

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

- Deux vecteurs x et y de E sont dits *orthogonaux**, ce que l'on note $x \perp y$, lorsque $\langle x, y \rangle = 0$.
- Deux parties X et Y de E sont dites *orthogonales*, ce que l'on note $X \perp Y$, lorsque

$$\forall (x, y) \in X \times Y, \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

- La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite *orthogonale* lorsque, pour tous $i, j \in I$ DISTINCTS, $\langle x_i, x_j \rangle = 0$.
- La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite *orthonormale* (ou *orthonormée*) lorsqu'elle est orthogonale et formée de vecteurs unitaires, i.e. lorsque, pour tous $i, j \in I$, $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$.

Exemple 22

- La base canonique de \mathbb{R}^n est orthonormale pour le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n .

En effet, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle E_i, E_j \rangle = E_i^\top E_j = \delta_{i,j}$.

- La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

En effet, pour tous $(i, j), (k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\langle E_{i,j}, E_{k,l} \rangle = \text{tr}(E_{i,j}^\top E_{k,l}) = \text{tr}(E_{j,i} E_{k,l}) = \text{tr}(\delta_{i,k} E_{j,l}) = \delta_{i,k} \text{tr}(E_{j,l}) = \delta_{i,k} \delta_{j,l} = \delta_{(i,j), (k,l)}.$$

La notion d'orthogonalité repose dorénavant sur la définition préalable d'un produit scalaire. En particulier, à chaque produit scalaire est associée une notion d'orthogonalité propre, ainsi les « angles droits » ne sont plus droits dans l'absolu mais relativement à un choix de produit scalaire.

Exemple 23 Pour le produit scalaire $((x, y), (x', y')) \mapsto 2xx' + xy' + x'y + 2yy'$ sur \mathbb{R}^2 (qui précède l'exemple 6), la base canonique n'est pas orthonormale. En revanche, la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2)\right)$ l'est (le vérifier!).

Exemple 24 La famille de fonctions $(t \mapsto \sin(nt))_{n \geq 1}$ est orthonormale dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$.

*. Du grec ancien ορθός (orthós) « droit » et γωνία (gônia) « angle ».

Exemple 25 Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$, les sous-espaces des fonctions paires et des fonctions impaires sont orthogonaux pour le produit scalaire usuel $(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$.

En effet, il suffit d’observer que le produit d’une fonction paire et d’une fonction impaire est une fonction impaire qui est donc d’intégrale nulle entre -1 et 1 .

Théorème 26 – Vecteur orthogonal à tout vecteur

Dans un espace préhilbertien réel, le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tout vecteur.

Démonstration. Soit E un espace préhilbertien réel et $x \in E$. Si x est orthogonal à tout vecteur de E , alors x est en particulier orthogonal à lui-même : $\langle x, x \rangle = 0$ et ainsi $x = 0_E$ (le produit scalaire étant défini positif). ■

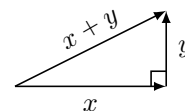
Théorème 27 – Propriétés des familles orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

• **Théorème de Pythagore.**† Soit $x, y \in E$.

Les vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

En outre, pour toute famille orthogonale (x_1, \dots, x_n) de E , $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$.

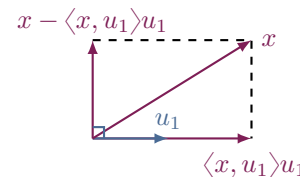


• **Liberté vs orthogonalité.** Toute famille orthogonale de vecteurs NON NULS de E est libre.

En particulier toute famille orthonormale de vecteurs de E est libre.

Démonstration. ...

Terminons avec un résultat qui s’avérera essentiel dans la suite de ce chapitre et qui se conçoit aisément sur une figure.



Théorème 28 – Orthogonalité par redressement

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Si (u_1, \dots, u_n) est une famille ORTHONORMALE de E , alors, pour tout

$x \in E$, le vecteur $x - \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k$ est orthogonal aux u_i .

Démonstration. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\left\langle x - \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k, u_i \right\rangle = \langle x, u_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle \overbrace{\langle u_k, u_i \rangle}^{=\delta_{k,i}} = \langle x, u_i \rangle - \langle x, u_i \rangle = 0$. ■

2.2 Bases orthonormées

Définition-théorème 29 – Base orthonormale/orthonormée

Soit E un espace euclidien de dimension n non nulle.

- Une base \mathcal{B} de E est dite *orthonormale* (ou *orthonormée*) lorsque la famille \mathcal{B} l’est.
- Toute famille orthonormale de n vecteurs de E est une base orthonormale de E .

Démonstration. Une famille orthonormale de n vecteurs de E est libre, en vertu du théorème 27 et donc une base de E dans la mesure où elle a pour cardinal la dimension de E . ■

Exemple 30 D’après l’exemple 22,

- La base canonique de \mathbb{R}^n est une base orthonormale de \mathbb{R}^n pour sa structure euclidienne canonique.
- La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ pour sa structure euclidienne canonique.

†. Pythagore (vers 580 av. J.-C. à Samos – vers 495 av. J.-C. à Métaponte) est un réformateur religieux, philosophe présocratique et mathématicien, dont aucun écrit ne nous est parvenu.

Théorème 31 – Coordonnées dans une base orthonormale

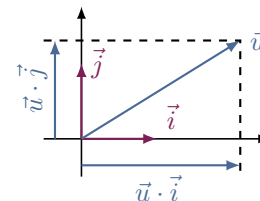
Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Si (e_1, \dots, e_n) une base ORTHONORMALE de E , alors

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Autrement dit, $(\langle x, e_i \rangle)_{1 \leq i \leq n}$ est la famille des coordonnées de x dans la base orthonormale (e_1, \dots, e_n) .

Démonstration. Notons (x_1, \dots, x_n) les coordonnées de x dans la base (e_1, \dots, e_n) . Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\langle x, e_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, e_k \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i, e_k \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \delta_{ik} = x_k.$$



Remarque 32 Le théorème précédent n'est qu'une généralisation d'un résultat classique dans le plan que vous utilisez déjà.

Théorème 33 – Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $x, y \in E$ de coordonnées respectives $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ dans une base ORTHONORMALE de E . Alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = X^T Y \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \sqrt{X^T X}.$$

Démonstration. Notons (e_1, \dots, e_n) la base orthonormale considérée. Alors

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{k=1}^n x_k y_k = X^T Y.$$

Le résultat précédent montre finalement que le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n est un modèle pour tous les produits scalaires des espaces euclidiens. Calculer le produit scalaire $\langle x, y \rangle$ dans un espace euclidien abstrait revient à calculer le produit scalaire canonique des coordonnées des vecteurs x et y dans une base ORTHONORMALE quelconque.

✗ ATTENTION ! ✗ Ces formules sont fausses en général pour des coordonnées dans une base NON orthonormale.

2.3 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Les bases orthonormales jouent un rôle fondamental au sein des espaces euclidiens, d'où l'importance du résultat suivant qui en permet une construction systématique.

Théorème 34 – Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt†

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Si (e_1, \dots, e_n) est une famille LIBRE de E , alors il existe une famille orthonormale (u_1, \dots, u_n) de E telle que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k).$$

Les vecteurs u_1, \dots, u_n peuvent être construits de proche en proche :

- on commence par normaliser e_1 : $u_1 = \pm \frac{e_1}{\|e_1\|}$;
- pour k allant de 2 à n : on pose $\hat{u}_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i$ et u_k est $\pm \frac{\hat{u}_k}{\|\hat{u}_k\|}$.

Démonstration. ...

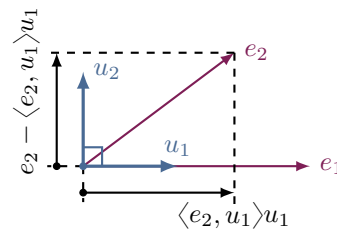
†. Jørgen Pedersen Gram (1850 à Nustrup – 1916 à Copenhague) est un mathématicien danois.

Erhard Schmidt (1876 à Dorpat (Estonie, alors Empire russe) – 1959 à Berlin) est un mathématicien allemand élève de David Hilbert et cofondateur avec ce dernier de l'analyse fonctionnelle moderne.

En pratique On a tout compris de cet algorithme lorsque l'on a saisi le cas $n = 2$. On souhaite transformer une famille libre quelconque (e_1, e_2) en une famille orthonormale (u_1, u_2) avec :

$$u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1}{\|e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1\|}.$$

- La première transformation normalise e_1 , i.e. le rend unitaire.
- La seconde commence par transformer e_2 en $e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1$, i.e. retranche à e_2 sa composante en u_1 , égale à $\langle e_2, u_1 \rangle u_1$. Le vecteur ainsi obtenu est orthogonal à u_1 , mais il peut évidemment ne pas être unitaire et on le normalise en le divisant par sa norme.



Plus généralement, l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt construit u_k en redressant e_k , i.e. en lui ôtant ses composantes selon u_1, \dots, u_{k-1} afin de le rendre orthogonal à u_1, \dots, u_{k-1} (cf. théorème 28), puis en normalisant le vecteur ainsi obtenu (cf. remarque 51 aussi).

Remarque 35 Lors de la mise en œuvre pratique de l'algorithme de Gram-Schmidt, il est inutile de vérifier a priori la liberté de la famille de vecteurs (e_1, \dots, e_n) initiale. En effet, on détecterait le caractère lié de cette famille par la nullité d'un des vecteurs u_k .

Exemple 36 L'application de l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$ pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt$ sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ aboutit à la famille orthonormale

$$(x \mapsto 1, x \mapsto \sqrt{3}(2x - 1), x \mapsto \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)).$$

En effet, posons $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto x^2$ et remarquons que la famille initiale (f_0, f_1, f_2) est libre.

- *Construction de u_0 .* Il suffit de poser $u_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|}$. Or $\|f_0\|^2 = \int_0^1 1 dt = 1$, ainsi $u_0 = f_0$.
- *Construction de u_1 .* On pose $u_1 = \frac{f_1 - \langle f_1, u_0 \rangle u_0}{\|f_1 - \langle f_1, u_0 \rangle u_0\|}$. Or $\langle f_1, u_0 \rangle = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$, ainsi le numérateur est la fonction $f_1 - \frac{1}{2}u_0 : x \mapsto x - \frac{1}{2}$, pour laquelle

$$\left\| x \mapsto x - \frac{1}{2} \right\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 dt = \frac{1}{12}.$$

Par conséquent, $u_1 : x \mapsto \sqrt{12}(x - \frac{1}{2}) = \sqrt{3}(2x - 1)$ et la famille (u_0, u_1) est orthonormale.

- *Construction de u_2 .* On pose $u_2 = \frac{f_2 - \langle f_2, u_0 \rangle u_0 - \langle f_2, u_1 \rangle u_1}{\|f_2 - \langle f_2, u_0 \rangle u_0 - \langle f_2, u_1 \rangle u_1\|}$. Or

$$\langle f_2, u_0 \rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \langle f_2, u_1 \rangle = \int_0^1 t^2 \times \sqrt{3}(2t - 1) dt = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

ainsi le numérateur est la fonction $f_2 - \frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{2\sqrt{3}}u_1 : x \mapsto x^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \sqrt{3}(2x - 1) = x^2 - x + \frac{1}{6}$, pour laquelle

$$\left\| x \mapsto x^2 - x + \frac{1}{6} \right\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right)^2 dt = \frac{1}{180}.$$

Par conséquent, $u_2 : x \mapsto \sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6}) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$ et la famille (u_0, u_1, u_2) est orthonormale.

Essentiel en pratique, l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt a aussi des conséquences théoriques.

Théorème 37 – Existence de bases orthonormales en dimension finie

- (i) Tout espace euclidien, non réduit à $\{0_E\}$, possède une base orthonormale.
- (ii) **Théorème de la base orthonormale incomplète.**
Toute famille orthonormale d'un espace euclidien E peut être complétée en une base orthonormale de E .

Démonstration.

- (i) De dimension non nulle, E possède une base, donc une base orthonormale via l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
- (ii) Libre, toute famille orthonormale \mathcal{L} de E peut être complétée en une base de E (théorème de la base incomplète). Or appliqué à cette base, l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt n'affecte pas les vecteurs de \mathcal{L} et on peut donc considérer que \mathcal{L} a été complétée en une base orthonormale de E . ■

2.4 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition-théorème 38 – Orthogonal d'une partie

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et X une partie de E . On appelle *orthogonal de X dans E* l'ensemble

$$X^\perp = \{u \in E \mid \forall x \in X, \langle u, x \rangle = 0\}.$$

- (i) X^\perp est un sous-espace vectoriel de E orthogonal à la partie X .
- (ii) Si X est un sous-espace vectoriel de E , alors X et X^\perp sont en somme directe.
- (iii) $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$ et $X \subset (X^\perp)^\perp$.

Démonstration. ...

✗ ATTENTION ! ✗ Pour un sous-espace vectoriel F de E , F et F^\perp sont toujours en somme directe, en revanche F et F^\perp peuvent ne pas être supplémentaires dans E . Par ailleurs, l'égalité $(F^\perp)^\perp = F$ est fautive en général (cf. exercice 21).

Exemple 39 Pour tout espace préhilbertien réel E , $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

En effet, rappelons en effet que le vecteur nul 0_E est le seul vecteur de E orthogonal à tous les vecteurs (cf. théorème 26).

Exemple 40

- Soit a un vecteur non nul d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. L'orthogonal de $\{a\}$ est un hyperplan de E .

En effet, $\{a\}^\perp$ n'est autre que le noyau de la forme linéaire non nulle $x \mapsto \langle x, a \rangle$ définie sur E .

- Dans l'espace euclidien canonique \mathbb{R}^3 , le plan vectoriel d'équation $3x - y + 2z = 0$ est l'orthogonal $\{(3, -1, 2)\}^\perp$. En termes géométriques, le vecteur $(3, -1, 2)$ est normal au plan d'équation $3x - y + 2z = 0$.

En effet, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\langle (3, -1, 2), (x, y, z) \rangle = 3x - y + 2z$.

Remarque 41

- L'égalité $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$ du point (iii) signifie que pour déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F , il suffit d'exiger l'orthogonalité à tout vecteur d'une partie génératrice de F .
- Si X et Y sont deux parties d'un espace préhilbertien E , alors

$$(i) X \perp Y \iff X \subset Y^\perp \iff Y \subset X^\perp; \quad (ii) X \subset Y \implies Y^\perp \subset X^\perp.$$

Exemple 42 Pour le produit scalaire $(P, Q) \mapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$ sur $\mathbb{R}_2[X]$ (cf. exemple 8), $\mathbb{R}_1[X]^\perp = \text{Vect}(3X^2 - 2)$.

Définition-théorème 43 – Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de DIMENSION FINIE de E .

- (i) **Supplémentaire orthogonal.** Le sous-espace F^\perp est un supplémentaire de F dans E orthogonal à F et il s'agit même du seul. On l'appelle *le supplémentaire orthogonal de F dans E* et on note $E = F \oplus F^\perp$. En particulier, si E est lui-même de dimension finie, alors $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.
- (ii) **Bi-orthogonal.** $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration. ...

✗ ATTENTION ! ✗ Le théorème précédent ne vaut que pour des sous-espaces vectoriels de DIMENSION FINIE (cf. exercice 21). Par ailleurs, rappelons que s'il existe un unique supplémentaire orthogonal à F dans ce contexte, il existe toujours plusieurs supplémentaires quelconques à F .

Exemple 44 Dans l'espace \mathbb{R}^4 , muni de sa structure euclidienne canonique, le plan vectoriel P d'équations

$$\begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 2x + y + z - t = 0 \end{cases} \text{ admet } \text{Vect}((1, -1, -1, -1), (2, 1, 1, -1)) \text{ pour orthogonal.}$$

Exemple 45 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique,

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{N}_n(\mathbb{R}),$$

où $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients diagonaux nuls.

Autrement dit, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 46 – Orthogonalité et dimension

De façon générale, certaines propriétés de la relation d'orthogonalité ne sont valables qu'en dimension finie comme le résume le tableau ci-contre (cf. exercices 19 et 21), où F et G désignent deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E .

dimension quelconque	dimension finie
$F \subset (F^\perp)^\perp$	$F = (F^\perp)^\perp$
$F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$	$F \subset G \iff G^\perp \subset F^\perp$
$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$	$F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$
$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$	$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
$F \oplus F^\perp \subsetneq E$ possible	$F \oplus F^\perp = E$

3 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

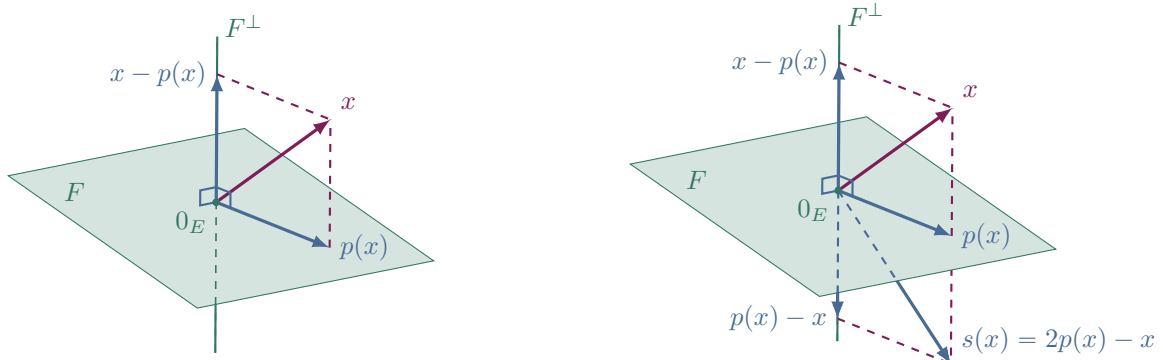
3.1 Projections et symétries orthogonales

Définition 47 – Projection/symétrie orthogonale

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel DE DIMENSION FINIE de E .

- **Projection orthogonale.** On appelle *projection orthogonale sur F* ou *projecteur orthogonal sur F* la projection sur F parallèlement à F^\perp .
- **Symétrie orthogonale.** On appelle *symétrie orthogonale par rapport à F* la symétrie par rapport à F parallèlement à F^\perp .

Dans la mesure où F est un sous-espace de dimension finie de E , on a $E = F \oplus F^\perp$ (théorème 43).



Théorème 48 – Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel DE DIMENSION FINIE de E . Si (f_1, \dots, f_n) une base ORTHONORMALE de F , alors, pour tout $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur F est $\sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k$.

Démonstration. D'après le théorème 28, $x = \underbrace{\sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k}_{\in F} + \underbrace{x - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k}_{\in F^\perp}$. ■

En pratique Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel DE DIMENSION FINIE de E et (f_1, \dots, f_n) une base de F . Indiquons deux méthodes pour calculer le projeté orthogonal $p(x)$ d'un vecteur x de E lorsque la base (f_1, \dots, f_n) de F n'est pas orthonormale.

- **Première stratégie.** Se ramener au cas d'une base orthonormale via l'algorithme de Gram-Schmidt et utiliser alors l'expression donnée au théorème 48.
- **Seconde stratégie.** Le projeté $p(x)$ est caractérisé par les deux assertions $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$, que l'on visualise clairement sur la figure suivant la définition 47. Concrètement, on introduit les coordonnées $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de $p(x)$ dans la base (f_1, \dots, f_n) (non orthonormée a priori donc) et on les détermine via les n relations $\langle x - p(x), f_i \rangle = 0$, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ces relations expriment l'appartenance de $x - p(x)$ à F^\perp et mènent à un système linéaires de n équations en les n inconnues λ_j .

Exemple 49 On munit $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel (cf. exemple 6). Le projeté orthogonal de la fonction Id sur le sous-espace $F = \text{Vect}(\cos, \sin)$ est $t \mapsto -2 \sin t$.

Exemple 50 On se place dans \mathbb{R}^4 muni de sa structure euclidienne canonique. Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 défini par le système d'équation

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0. \end{cases}$$

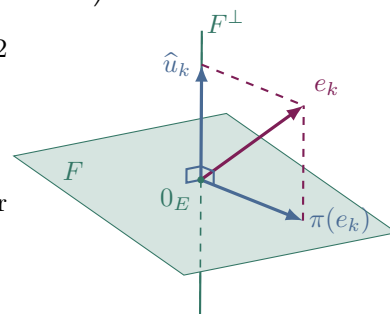
La matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F est $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque 51 Dans le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, à l'étape $k \geq 2$ on construit

$$\hat{u}_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i$$

et ce vecteur s'obtient donc en retranchant à e_k sa projection orthogonale $\pi(e_k)$ sur $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$. Notons alors que, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|\hat{u}_k\|^2 = \|e_k\|^2 - \|\pi(e_k)\|^2 = \|e_k\|^2 - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle^2.$$



3.2 Cas particuliers des hyperplans

Définition-théorème 52 – Vecteurs normaux à un hyperplan, projection orthogonale et réflexion

Soit E un espace euclidien de dimension non nulle et H un hyperplan de E .

(i) Vecteurs normaux à un hyperplan. Le sous-espace H^\perp est une droite vectorielle dont tout vecteur non nul est appelé un *vecteur normal* à H .

Fixons a un vecteur normal à H .

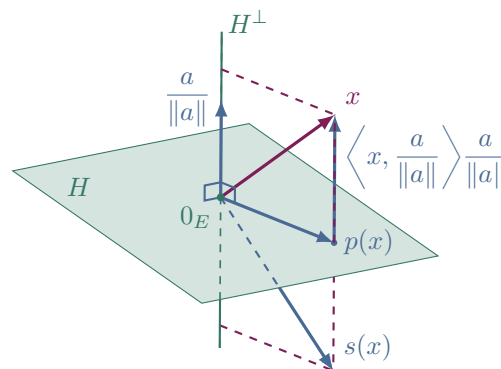
(ii) Projection orthogonale. Pour tout $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur H vaut $x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$.

(iii) Réflexion. On appelle *réflexion de E* toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E .

La réflexion de E par rapport à H a pour expression $x \mapsto x - 2 \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$.

Démonstration. ... ■

Essentiellement, les formules précédentes expriment que pour projeter sur H qui est « gros », il vaut mieux commencer par projeter sur H^\perp qui est « petit ». Projeter orthogonalement x sur H revient ainsi à retrancher à x sa composante selon a , et calculer son symétrique orthogonal par rapport à H revient à retrancher deux fois cette composante.



Lien avec les formes linéaires Par définition, l'hyperplan H est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E . Or, si a est un vecteur normal à H , alors

$$H = \{a\}^\perp = \{x \in E \mid \langle x, a \rangle = 0\}$$

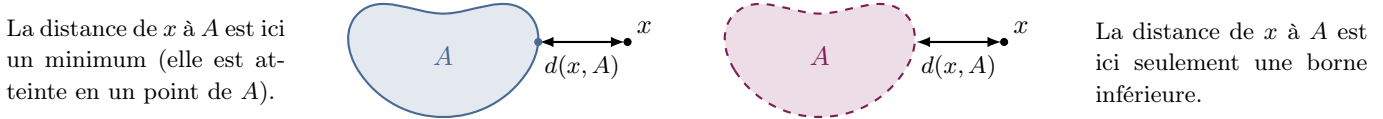
et H est donc le noyau de la forme linéaire non nulle $x \mapsto \langle x, a \rangle$. En outre, si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormale de E , notant (a_1, \dots, a_n) les coordonnées de a dans cette base, alors

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \langle x, a \rangle = 0$$

et on retrouve l'équation typique d'un hyperplan dont les coefficients décrivent les coordonnées d'un vecteur normal.

3.3 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Intuitivement, dans un espace préhilbertien réel, la distance d'un vecteur x à une partie A est la plus petite distance séparant x d'un élément de A . Cependant rien ne garantit l'existence d'un tel minimum, comme l'illustre les figures ci-après, ce qui motive la définition qui va suivre basée sur la notion de borne inférieure.



Définition-théorème 53 – Distance à une partie

Soit E un espace préhilbertien réel, A une partie non vide de E et $x \in E$. On appelle *distance de x à A* le réel

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Démonstration. L'ensemble $\{\|x - a\| \mid a \in A\}$ est une partie de \mathbb{R} non vide (car A l'est par hypothèse) et minorée par 0, elle possède donc une borne inférieure. ■

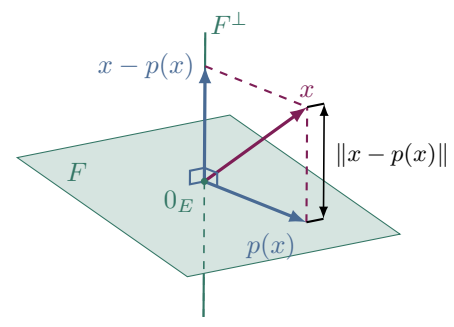
Dans un espace préhilbertien réel, la notion de projection orthogonale permet de déterminer de façon systématique la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 54 – Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit E un espace préhilbertien réel et $x \in E$.
 Si F un sous-espace vectoriel DE DIMENSION FINIE de E , alors la distance de x à F est un minimum atteint en un unique point, à savoir $p(x)$, où p est la projection orthogonale sur F , ainsi

$$d(x, F) = \|x - p(x)\|.$$

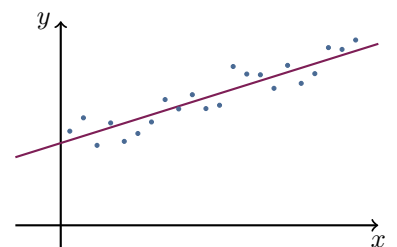
Par ailleurs, d'après le théorème de Pythagore,

$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2.$$


Démonstration. ... ■

Exemple 55 $\inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^{2\pi} (t - a \cos t - b \sin t)^2 dt = \frac{8\pi^3}{3} - 4\pi.$

Droite de régression linéaire Il est courant d'avoir à expliquer une quantité y par une quantité x (en physique ou en économie par exemple). Faisons l'hypothèse que y est une fonction affine de x : $y = mx + p$, avec $m, p \in \mathbb{R}$. Comment déterminer m et p lorsque l'on dispose de n mesures expérimentales $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ du couple (x, y) ? Le nuage des mesures (x_i, y_i) est en principe assez proche de la droite idéale visée, mais il n'est pas inclus dedans a priori, ne serait-ce qu'en raison des erreurs de mesure. Il s'agit alors de déterminer deux réels m et p pour lesquels la droite d'équation $y = mx + p$ est « la plus proche possible » du nuage de points. Ce problème est appelé un problème de *régression linéaire* (*linéaire* en lien avec la relation affine $y = mx + p$ qui lie x et y).



Encore faut-il préciser le sens de la « droite la plus proche » ? Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notre mesure de y pour $x = x_i$ a fourni la valeur y_i , toutefois en l'absence d'erreurs de mesure, nous aurions trouvé $mx_i + p$. L'erreur de la i^e mesure vaut donc $|y_i - mx_i - p|$, mais ce n'est pas cet écart ponctuel qui nous intéresse, nous nous intéressons plutôt à un écart global entre le nuage de points et la droite d'équation $y = mx + p$. Pour mesurer un tel écart, plusieurs définitions sont possibles, par exemple

$$\max_{1 \leq i \leq n} |y_i - mx_i - p|, \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n |y_i - mx_i - p|, \quad \text{ou} \quad \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - p)^2}.$$

Si l'on choisit cette troisième possibilité, la méthode de régression linéaire correspondante est appelée la *méthode des moindres carrés*. Elle consiste à déterminer deux réels m et p pour lesquels la quantité $\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - p)^2}$ est minimale, sous réserve d'existence. Dans l'espace euclidien canonique \mathbb{R}^n , posons

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n), \quad u = (1, \dots, 1) \quad \text{et} \quad F = \text{Vect}(x, u).$$

Aussitôt

$$\inf_{m,p \in \mathbb{R}} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - p)^2} = \inf_{m,p \in \mathbb{R}} \|y - mx - pu\| = \inf_{f \in F} \|y - f\| = d(y, F) = \|y - \pi(y)\|,$$

d'après le théorème précédent, en notant π la projection orthogonale de \mathbb{R}^n sur F . Finalement, on cherche à déterminer $m, p \in \mathbb{R}$ tel que $\pi(y) = mx + pu$. Or on a les équivalences

$$\begin{aligned} y - \pi(y) \in F^\perp &\iff \begin{cases} \langle y - \pi(y), x \rangle = 0 \\ \langle y - \pi(y), u \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \|x\|^2 m + \langle x, u \rangle p = \langle x, y \rangle \\ \langle x, u \rangle m + np = \langle u, y \rangle \end{cases} \dots \\ \dots &\iff m = \frac{n\langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle x, u \rangle}{n\|x\|^2 - \langle x, u \rangle^2} \quad \text{et} \quad p = \frac{\|x\|^2 \langle u, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle x, u \rangle}{n\|x\|^2 - \langle x, u \rangle^2}. \end{aligned}$$

Compétences à acquérir

- Montrer qu'une application est un produit scalaire : exercices 1, 5, 14, 20, 25, 24 et 29.
- Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz : exercices 2 à 10.
- Vérifier qu'une famille est orthogonale/orthonormale : exercices 14 et 15.
- Mettre en œuvre l'algorithme de Gram-Schmidt : exercices 12 et 13.
- Utiliser l'orthogonalité : exercices 15, 16, 18 et 17.
- Déterminer l'orthogonal d'un sous-espace : 13 et 19 à 21.
- Déterminer l'expression d'une projection orthogonale : exercices 26 à 23 et 29.
- Réaliser un calcul de distance à un sous-espace/déterminer un minimum en se ramenant à un calcul de distance : exercices 23 à 30.

Quelques résultats classiques :

- Produits scalaires usuels (exemples 6 à 8).
- Généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (exercice 3).
- Orthogonal d'une somme et d'une intersection (exercice 19).
- Matrice et déterminant de Gram (exercice 31).