2 Logique et raisonnements

Ce chapitre vise à introduire les notions élémentaires de la logique mathématique et à vous présenter ou vous rappeler les raisonnements de base utilisés pour les démonstrations en mathématiques ainsi que les règles à respecter pour rédiger correctement ces dernières.

1 Connecteurs logiques et quantificateurs

Le but de cette première partie n'est pas l'étude de la logique propositionnelle, *i.e.* l'étude des formules abstraites qu'on peut écrire à partir d'un certain nombre de variables propositionnelles, représentées par des lettres, ni même la présentation rigoureuse de cette logique, mais de voir comment des rudiments de la théorie de la logique permettent une mise en forme rigoureuse de la structure de la pensée et du cheminement logique. Quand bien même cette structuration ne peut en rien remplacer l'intuition.

On appelle *proposition* ou *assertion* toute phrase p ayant une valeur de vérité, vrai (V) ou faux (F) – mais pas les deux !

Exemple 1

- Les phrases suivantes sont des assertions, dont seule la première est vraie.

  a. « 1+1=2 ». b. « 1+1=3 ». c. « Un triangle a quatre sommets ».

- En revanche, « $1+1-2$ » et « $\left(\sqrt{18}\right)^3$ » ne sont pas des assertions, puisque l'on ne peut leur attribuer de valeur de vérité. Il s'agit simplement d'expressions numériques dont les valeurs respectives sont des nombres.

Une proposition mathématique peut comporter des variables, auquel cas sa valeur de vérité peut dépendre des valeurs de ces variables.

Exemple 2

- L'assertion « $x+2 \geqslant 4$ » dépend de la variable x. Elle est vraie si et seulement si x est plus grand que 2.
- « $10^x - \sqrt{y}$ » n'est pas en revanche une assertion, il s'agit d'une expression numérique dont le résultat est un réel qui dépend de x et y.

Lorsqu'une proposition dépend de variables explicitement données, on fera apparaitre cette dépendance, *e.g.* on peut noter $\mathscr{P}(x)$ la proposition « $x+2 \geqslant 4$ ».

1.1 Connecteurs logiques

Nous appellerons *connecteur logique* tout procédé de construction d'une proposition à partir d'une ou plusieurs propositions initiales. Dans la pratique, nous pourrons décrire les connecteurs logiques qui vont nous intéresser via leur *table de vérité* (connecteurs logiques dits *vérifonctionnels*†), notre point de vue sera donc purement syntaxique, en excluant dans un premier temps toute dimension sémantique. Les paragraphes qui suivent visent à introduire les règles de base du calcul propositionnel.

Définition 3 – Négation, conjonction, disjonction

- L'assertion « non p » est vraie lorsque p est fausse, et fausse lorsque p est vraie.
- L'assertion « p et q » est vraie lorsque p et q sont toutes les deux vraies, et fausse sinon.
- L'assertion « p ou q » est vraie lorsque l'une au moins des assertions p et q est vraie, et fausse seulement lorsque p et q le sont.

p	non p
V	
F	

p	q	p et q	p ou q
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

†. En général les connecteurs logiques des langues naturelles ne sont pas vérifonctionnels. Considérons à titre d'exemple le connecteur « car ». Il est raisonnable de considérer vraie l'assertion « Je suis en retard car mon réveil n'a pas sonné », pour laquelle les deux assertions « Je suis en retard » et « mon réveil n'a pas sonné » sont vraies. Pourtant, si l'on remplace « mon réveil n'a pas sonné » par « une année civile compte 365 jours », proposition également vraie, le nouvel énoncé « Je suis en retard car une année civile compte 365 jours » est faux. Ainsi le connecteur « car » ne saurait être vérifonctionnel et en logique naturelle d'autres éléments que la valeur de vérité des propositions connectées interviennent dans la valeur de vérité de leur composition.

Exemple 4 Pour toute assertion p, $\quad p$ ou V = V, $\quad p$ ou F = p, $\quad p$ et V = p $\quad$ et $\quad p$ et F = F.

✖ **Attention !** ✖ Dans le langage usuel le « ou » peut être *exclusif*, *i.e.* opposer les termes qu'il relie. Par exemple, dans l'expression « fromage ou dessert » des menus des restaurants, on ne vous propose pas de prendre les deux. En mathématiques le « ou » est toujours *inclusif*, puisque « p ou q » est vraie même lorsque p et q le sont simultanément.

Définition 5 – Implication, équivalence

- L'assertion « $p \implies q$ », lire « p implique q » ou « si p, alors q », est fausse dans le seul cas où p est vraie et q fausse.
- L'assertion « $p \iff q$ », lire « p si et seulement si q » ou « p équivaut à q », est vraie seulement lorsque p et q ont même valeur de vérité.

p	q	$p \implies q$	$p \iff q$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Remarque 6

- La table de vérité définissant l'implication se comprend bien en considérant sa négation : dire qu'une implication « $p \implies q$ » est fausse revient à dire que malgré le fait que l'hypothèse p soit vraie, la conclusion q est fausse.
- Lorsque l'implication « $p \implies q$ » est vraie, on dira que :
  - × p est une *condition suffisante* à q, en effet, pour que la proposition q soit vraie, il suffit que p le soit ;
  - × q est une *condition nécessaire* à p, en effet, pour que la proposition p soit vraie, il est nécessaire que q le soit, dans la mesure où la véracité de p entraîne celle de q.
- Puisque si p est faux, l'implication « $p \implies q$ » est toujours vraie, pour établir la véracité d'une assertion du type « $p \implies q$ », il suffit de se placer dans le cas où p est vraie : on suppose que p est vraie et on montre qu'il en va de même de q.

✖ **Attention !** ✖

- Affirmer que « $p \implies q$ » est vraie n'implique ni que p ni que q le soit. Il est parfaitement vrai que « Si Pinocchio est président de la République, alors il est le chef des armées. », et pourtant Pinocchio n'est pas plus président de la République qu'il n'est chef des armées. D'ailleurs « $p \implies q$ » est vraie dès que p est fausse !

  On veillera ainsi à ne pas utiliser la flèche d'implication « $\implies$ » pour dire « donc », ce n'est pas là son sens. En effet, lorsque l'on procède à un raisonnement du type « p est vraie donc q est vraie », ce n'est pas « $p \implies q$ » que l'on est en train d'affirmer, mais un enchevêtrement plus complexe d'assertions :

  $$p \text{ est vraie} \quad \text{ET} \quad « p \implies q » \text{ est vraie,} \quad \text{DONC} \quad q \text{ est vraie.}$$

  Ici, on s'intéresse in fine à la véracité de q, or l'assertion « $p \implies q$ » n'affirme rien à ce sujet a priori.
- Soulignons bien le sens du symbole d'implication :
  - × si l'on sait que p implique q et que p est vraie, alors nécessairement q l'est aussi ;
  - × si l'on sait que p implique q et que p est fausse, alors on ne peut rien en déduire quant à la valeur de vérité de q.

  Étudions ce mécanisme sur l'exemple suivant : « S'IL fait beau, ALORS j'irais au parc. » Deux cas se présentent :
  - × soit il fait beau (p est vraie), auquel cas je me dois d'aller au parc ;
  - × soit il ne fait pas beau (p est fausse), auquel cas je peux choisir d'aller malgré tout au parc ou de rester chez moi, sans remettre en cause la véracité de l'implication initiale.

Définition 7 – Réciproque, contraposée

- On appelle *réciproque* de l'implication « $p \implies q$ » l'assertion « $q \implies p$ ».
- On appelle *contraposée* de l'implication « $p \implies q$ » l'assertion « (non q) $\implies$ (non p) ».

La réciproque d'une implication consiste donc à échanger les rôles tenus par la condition suffisante et la condition nécessaire.

✖ **Attention !** ✖ Dans une contraposée, outre ajouter des négations, on PERMUTE les deux propositions.

Définition 8 – Formules équivalentes, tautologie

- Deux formules propositionnelles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont dites *équivalentes* lorsqu'elles prennent la même valeur de vérité l'une et l'autre, quelle que soit la distribution de vérité donnée sur l'ensemble des variables propositionnelles intervenant dans ces formules. On note alors $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$.
- On appelle *tautologie* toute formule propositionnelle toujours vraie (pour toute distribution de vérité).

Théorème 9 – Propriétés de la disjonction et de la conjonction

- **Commutativité.** p ou $q \equiv q$ ou p et p et $q \equiv q$ et p.
- **Associativité.** $(p$ ou $q)$ ou $r \equiv p$ ou $(q$ ou $r)$ et $(p$ et $q)$ et $r \equiv p$ et $(q$ et $r)$.
- **Distributivité.** p ou $(q$ et $r) \equiv (p$ ou $q)$ et $(p$ ou $r)$ et p et $(q$ ou $r) \equiv (p$ et $q)$ ou $(p$ et $r)$.

Démonstration. Il suffit de dresser les tables de vérité des formules propositionnelles à comparer (cf. exercice 1). ■

Remarque 10 Les propriétés d'associativité de la disjonction et de la conjonction permettent d'écrire sans parenthèse

$$p \text{ ou } q \text{ ou } r \qquad \text{et} \qquad p \text{ et } q \text{ et } r.$$

Théorème 11 – Règle de calcul sur l'implication et l'équivalence

- **Implication vs disjonction.** Les assertions « $p \implies q$ » et « (non p) ou q » sont équivalentes.
- **Contraposée.** Toute implication est équivalente à sa contraposée : $p \implies q \equiv (\text{non } q) \implies (\text{non } p)$.
- **Equivalence vs double implication.** L'équivalence est une double implication :

$$p \iff q \equiv (p \implies q) \text{ et } (q \implies p).$$

Démonstration.

p	q	non p	non q	(non p) ou q	$p \implies q$	(non q) $\implies$ (non p)	$q \implies p$	$(p \implies q)$ et $(q \implies p)$	$p \iff q$
V	V								
V	F								
F	V								
F	F								

■

Exemple 12 Il est équivalent de dire : « $\overbrace{\text{Si un quadrilatère est un rectangle, alors c'est un parallélogramme.}}^{p \implies q}$ » et « $\underbrace{\text{Si un quadrilatère n'est pas un parallélogramme, alors ce n'est pas un rectangle.}}_{(\text{non } q) \implies (\text{non } p)}$ ».

Remarque 13 En vertu du dernier point du théorème précédent, on exprime aussi que p et q sont équivalentes en disant que q est une *condition nécessaire et suffisante* pour p.

Selon la règle **1** du théorème 11, les propositions « p ou q » et « (non p) $\implies q$ » sont équivalentes. Ainsi, dire que de deux propositions l'une (au moins) est vraie, revient à dire que si l'on suppose fausse l'une fixée des deux, alors l'autre est vraie.

Exemple 14 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\max\{x^2, (x-2)^2\} \geqslant 1$.

La règle **2** du théorème 11, indique quant à elle que l'implication « $p \implies q$ » est équivalente à sa contraposée « (non q) $\implies$ (non p) », ce qui nous procure une nouvelle méthode pour établir une implication.

Exercice 15 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair, alors n est pair.

1.2 Quantificateurs

Dans ce qui précède, nous nous sommes intéressés aux liens logiques entre propositions, sans en examiner le contenu. Dans un texte mathématique élaboré, les variables propositionnelles représentent des propositions mathématiques élémentaires : des formules, des équations, des propriétés mathématiques, etc. Ces énoncés s'expriment souvent à l'aide de variables mathématiques, vouées à prendre des valeurs dans un ensemble et dont dépend la véracité. Deux propriétés particulières liées à une formule utilisant une variable sont notamment intéressantes :

- le fait que la formule soit vraie pour toutes les valeurs possibles de la variable dans un ensemble donné ;
- le fait que la formule soit vraie pour au moins une valeur de la variable dans un ensemble donné.

Pour exprimer ces propriétés, on introduit deux symboles, appelés *quantificateurs*.

Définition 16 – Quantificateur universel $\forall$, quantificateur existentiel $\exists$

Soit E un ensemble.

- L'assertion « $\forall x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$ » est vraie lorsque tout élément de E a la propriété $\mathscr{P}$ et fausse sinon, *i.e.* si au moins un élément de E n'a pas la propriété $\mathscr{P}$. On lira « Pour tout x dans E, $\mathscr{P}(x)$ est vérifiée. » ou « Quel que soit x dans E, $\mathscr{P}(x)$ est vérifiée. ».
- L'assertion « $\exists x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$ » est vraie lorsqu'au moins un élément de E a la propriété $\mathscr{P}$ et fausse sinon, *i.e.* si aucun élément de E n'a la propriété $\mathscr{P}$. On lira « Il existe x dans E tel que $\mathscr{P}(x)$ est vérifiée. ».

Remarque 17 Remplacer le symbole d'une variable quantifiée par un autre – indépendant des autres symboles intervenant dans la formule – ne change pas le sens de l'assertion, *e.g.* « $\forall x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$ » et « $\forall y \in E, \quad \mathscr{P}(y)$ » sont équivalentes. La variable x est dite *muette*.

Exemple 18 Les deux assertions suivantes sont vraies : « $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad x^2 \neq 2$ » et « $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 2$ ».
En effet, les seuls réels dont le carré vaut 2 sont $\pm\sqrt{2}$, qui sont deux nombres irrationnels.

Théorème 19 – Permutation des quantificateurs

1. « $\forall x, \forall y, \quad \mathscr{P}(x,y)$ » $\equiv$ « $\forall y, \forall x, \quad \mathscr{P}(x,y)$ ». **2.** « $\exists x, \exists y, \quad \mathscr{P}(x,y)$ » $\equiv$ « $\exists y, \exists x, \quad \mathscr{P}(x,y)$ ».

Ainsi, il est toujours possible de permuter les quantificateurs universels « $\forall$ » ENTRE EUX et les quantificateurs existentiels « $\exists$ » ENTRE EUX.

Exemple 20

- Les assertions « $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \forall y \in \mathbb{R}_-, \ x \geqslant y$ » et « $\forall y \in \mathbb{R}_-, \ \forall x \in \mathbb{R}_+, \ x \geqslant y$ » sont équivalentes.
- Les assertions « $\exists x \in \mathbb{R}_+, \ \exists y \in \mathbb{R}_-, \ x \geqslant y$ » et « $\exists y \in \mathbb{R}_-, \ \exists x \in \mathbb{R}_+, \ x \geqslant y$ » sont équivalentes.

✖ **ATTENTION !** ✖ En revanche, la permutation d'un « $\forall$ » avec un « $\exists$ » n'est pas automatique.

- L'assertion « Dans toute cerise il y a un noyau. » est vraie, soit formellement « $\forall c, \ \exists n, \ n$ est dans c ». Mais la proposition permutée « $\exists n, \ \forall c, \ n$ est dans c » est clairement fausse (« Il existe un noyau qui se trouve dans toutes les cerises. »).
  Ainsi pour une proposition « $\forall \exists$ » vraie, la proposition associée « $\exists \forall$ » peut être fausse.
- A contrario, si une proposition « $\exists \forall$ » est vraie, il en va de même de « $\forall \exists$ ».

Ainsi, lorsque une proposition « $\exists\forall$ » est vraie, la proposition « $\forall\exists$ » l'est aussi. Autrement dit, la quantification « $\exists \forall$ » est plus forte que la quantification « $\forall \exists$ ». Il est inutile de retenir ces résultats qui sont assez intuitifs, mais il est indispensable de savoir les retrouver rapidement le cas échéant.

Exemple 21 Comparer, pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les assertions :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists M \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leqslant M$. **(ii)** $\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant M$.

Définition 22 – Pseudo-quantificateur existentiel $\exists!$

L'assertion « $\exists! x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$ » est vraie lorsque l'ensemble E contient EXACTEMENT un élément vérifiant la propriété $\mathscr{P}$. On lira « Il existe un unique x dans E tel que $\mathscr{P}(x)$ est vérifiée. ».

Exemple 23 L'assertion suivante est vraie : « $\exists! n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant 2n \leqslant 3$ ». En l'occurrence $n = 1$.

Exemple 24 Écrire l'assertion « $\exists! x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$ » sans le pseudo-quantificateur $\exists!$.

✖ **ATTENTION !** ✖ Les symboles de quantificateurs et de connecteurs logiques servent à exprimer rigoureusement et brièvement des propositions mathématiques de façon FORMELLE. Il est totalement exclu d'en faire usage à des fins abréviatives ! Les rédactions suivantes sont par exemple PROSCRITES :

- Démontrons qu'$\exists$ un élément de $\mathbb{R}$ tel que ...
- Ce qui prouve que, $\forall x \in \mathbb{R}$, la proposition ...

1.3 Négations

Dans de nombreuses occasions, par exemple pour mener des démonstrations par l'absurde ou par la contraposée, il est important de savoir nier une expression mathématique (*i.e.* exprimer son contraire) de façon efficace. Cette négation peut se faire de façon purement formelle, en utilisant les règles de négation décrites ci-après.

Théorème 25 – Double négations, négation d'une conjonction/disjonction/implication/équivalence

1. Les assertions p et « non (non p) » sont équivalentes.
2. Les assertions « non (p et q) » et « (non p) ou (non q) » sont équivalentes.
3. Les assertions « non (p ou q) » et « (non p) et (non q) » sont équivalentes.

(2. et 3. : **Lois de De Morgan**†)

4. Les assertions « non ($p \implies q$) » et « p et (non q) » sont équivalentes.
5. Les assertions « non ($p \iff q$) » et « $p \iff$ (non q) » sont équivalentes.

Démonstration.

p	non p	non (non p)
V		
F		

p	q	non p	non q	p et q	non (p et q)	(non p) ou (non q)	p ou q	non (p ou q)	(non p) et (non q)
V	V								
V	F								
F	V								
F	F								

■

Exemple 26 « Prenons un pot de vanille et un pot de chocolat, je suppose qu'$\overbrace{\text{il aime l'un des deux parfums}}^{p \text{ ou } q}$? »
« Justement non, $\underbrace{\text{il n'aime ni l'un ni l'autre}}_{(\text{non } p) \text{ et } (\text{non } q)}$. »

Remarque 27 On pourra retenir que la négation d'une disjonction équivaut à la conjonction des négations, et inversement.

Exemple 28 Quelle est la négation de la proposition « S'il pleut, alors mon jardin est mouillé. » ?

a. « S'il ne pleut pas, alors mon jardin est mouillé. »
b. « S'il pleut, alors mon jardin n'est pas mouillé. »
c. « Il pleut et mon jardin n'est pas mouillé. »
d. « S'il ne pleut pas, alors mon jardin n'est pas mouillé. »
e. « Si mon jardin n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas. »

†. Augustus De Morgan (1806 à Madurai (Inde) – 1871 à Londres), mathématicien et logicien britannique, fondateur avec Boole de la logique moderne.

Remarque 29 En vertu des théorèmes 11 et 25, toute formule propositionnelle formée à partir des cinq connecteurs logiques « ou », « et », « non », « $\Longrightarrow$ » et « $\Longleftrightarrow$ » peut être récrite en utilisant seulement les deux connecteurs « ou » et « non » (ou les deux connecteurs « et » et « non »).

Exercice 30 Donner une démonstration alternative du point **2** du théorème 11.

Théorème 31 – Négation des quantificateurs

1. Les assertions « non $(\forall x \in E, \quad \mathscr{P}(x))$ » et « $\exists x \in E, \quad \text{non } \mathscr{P}(x)$ » sont équivalentes.
2. Les assertions « non $(\exists x \in E, \quad \mathscr{P}(x))$ » et « $\forall x \in E, \quad \text{non } \mathscr{P}(x)$ » sont équivalentes.

En effet, pour nier en **1** une propriété universelle sur E , il suffit de trouver un contre-exemple. En **2**, nier qu'il existe un élément x dans E satisfaisant $\mathscr{P}$, revient à dire que l'ensemble des x satisfaisant $\mathscr{P}$ est vide ou encore que « non $\mathscr{P}$ » est universelle sur E.

Exemple 32

- S'équivalent : « $\overbrace{\text{Il est faux que tout homme a les yeux bleus.}}^{\text{non } (\forall x \in E, \quad \mathscr{P}(x))}$ » et « $\overbrace{\text{Certains hommes n'ont pas les yeux bleus.}}^{\exists x \in E, \quad \text{non } \mathscr{P}(x)}$ ».
- S'équivalent : « $\underbrace{\text{Il est faux que certains hommes ont des cornes.}}_{\text{non } (\exists x \in E, \quad \mathscr{P}(x))}$ » et « $\underbrace{\text{Tout homme est sans corne.}}_{\forall x \in E, \quad \text{non } \mathscr{P}(x)}$ ».

✎ **En pratique** ✎ **(Nier une proposition universelle)** Pour nier une proposition universelle, *i.e.* montrer qu'une proposition de la forme « $\forall x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$ » est fausse, il suffit d'exhiber un contre-exemple.

Exemple 33 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = 2^n + 1$, pour $n \in \mathbb{N}$, n'est pas une suite géométrique de raison 2. Autrement dit, il s'agit de nier l'assertion « $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n$ ».

En effet, pour $n = 0$, on a $u_0 = 2^0 + 1 = 2$ et $u_{0+1} = u_1 = 2^1 + 1 = 3$. Ainsi $u_{n+1} \neq 2u_n$ pour $n = 0$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne saurait être géométrique de raison 2.

✎ **En pratique** ✎ **(Négation d'une assertion quantifiée)** En pratique, pour nier une assertion contenant un ou plusieurs quantificateurs, on récrit cette assertion en remplaçant tous les « $\forall$ » par des « $\exists$ » et tous les « $\exists$ » par des « $\forall$ », puis on nie le prédicat final.

Exercice 34 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Nier l'assertion « $\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant M$ ».

En particulier, les propositions « non $(\forall x \in E, \quad \mathscr{P}(x) \Longrightarrow \mathscr{Q}(x))$ » et « $\exists x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$ et $(\text{non } \mathscr{Q}(x))$ » sont équivalentes. Dire que le prédicat $\mathscr{P}$ n'implique pas $\underbrace{\text{TOUJOURS}}_{\forall}$ le prédicat $\mathscr{Q}$ revient à dire que $\underbrace{\text{DANS CERTAINS CAS}}_{\exists}$ $\mathscr{P}$ peut être vrai sans que $\mathscr{Q}$ le soit.

Exercice 35 Pour une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, nier l'assertion « $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$ ».

2 Composition d'un texte mathématique

Un texte mathématique est constitué des objets suivants :

- **Axiomes.** Ce sont des résultats qui constituent des vérités fondamentales de la théorie, donnés sans justification (à considérer comme le cahier des charges de la théorie : on impose ces résultats, il n'y a donc pas besoin de les démontrer).

  En pratique, même si nous nous efforcerons tout au long de l'année de démontrer presque tous les énoncés que nous introduirons, nous nous tiendrons assez éloignés des axiomes sur lesquels les mathématiques sont traditionnellement fondées.
- **Définitions.** On appelle *définition* toute manière d'accorder un nom jusqu'ici inusité à un objet vérifiant une certaine propriété. En cela, les définitions introduisent dans la théorie des raccourcis de langage.
- **Théorèmes.** On appelle *théorème* tout énoncé de la théorie que l'on a pu démontrer à partir de ses axiomes et de théorèmes démontrés antérieurement. Une théorie mathématique n'est finalement qu'un empilement ordonné d'axiomes, de démonstrations et de théorèmes. Trois autres mots sont couramment utilisés pour désigner certaines formes de théorèmes :
  - × **Lemmes.** On appelle *lemme* tout théorème préparatoire qui apparaît comme une étape vers un résultat plus consistant (résultat préliminaire, mais pouvant avoir son intérêt en soi).
  - × **Corollaires.** On appelle *corollaire* toute conséquence assez immédiate d'un autre théorème, par exemple un cas particulier intéressant.
  - × **Caractérisations.** On appelle *caractérisation* tout théorème concernant une notion et qui donne une condition équivalente à la définition de cette notion.
- **Démonstrations.** On appelle *démonstration* tout procédé de justification de la véracité d'un théorème, basé sur les règles de la logique.
- **Conjectures.** On appelle *conjecture* tout énoncé que l'on pense être vrai, mais que l'on n'a pas encore réussi à prouver.

Exemple 36 – Conjecture de Goldbach† (1742) Tout nombre entier pair supérieur ou égal à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

3 Principes de démonstrations

Dans un exercice ou un devoir, il appartient au candidat de construire lui-même les démonstrations. Il est donc intéressant de disposer d'une démarche permettant d'aborder ces démonstrations de façon systématique et structurée. Bien entendu, l'application formelle des règles ci-après n'est en général pas suffisante, il faudra certainement à un moment de la démonstration apporter une ou plusieurs idées personnelles !

La construction rigoureuse d'une démonstration repose sur la structure logique de l'énoncé à démontrer. En effet, une formule mathématique étant construite en itérant des structures élémentaires, il s'agit d'appliquer les principes basiques de démonstration décrits ci-après à chaque étape de l'édification de la démonstration, ce qui nécessite de dérouler la structure logique du résultat à montrer.

✖ **ATTENTION !** ✖ La structure logique, puis les règles de la logique formelle, ne font que structurer une démonstration. Une bonne rédaction passe par une mise en langage de ces règles : on rédige toujours à l'aide de phrases complètes, et non par un enchaînement de formules logiques absconses !

Avant d'entrer dans le vif du sujet, commençons par rappeler LA règle fondamentale pour rédiger correctement.

✖ **ATTENTION !** ✖ La première règle de rédaction est que TOUT OBJET DONT ON PARLE DOIT ÊTRE INTRODUIT. En français, si l'on dit « Elle les lui a donnés hier », sans avoir précisé auparavant qui sont « elle », « les » et « lui », il y a peu de chance que l'on soit compris. En mathématiques, il en va de même et il est donc IMPÉRATIF de présenter tout ce dont on va parler. Un calcul de dérivée par exemple ne doit jamais ressembler à « $f'(x) = \ldots$ », mais être présenté proprement, avec la variable x parfaitement introduite :

$$\text{« POUR TOUT } x \in \ldots, \quad f'(x) = \ldots \text{ ».}$$

†. Christian Goldbach (1690 à Königsberg – 1764 à Moscou) est un mathématicien allemand, tuteur du futur empereur russe Pierre II.

3.1 Prouver une proposition universelle « $\forall x \ \mathscr{P}(x)$ »

On a souvent l'occasion d'introduire des variables en mathématiques lorsque l'on souhaite prouver des propositions universelles, *i.e.* de la forme « $\forall x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$ ». Il s'agit alors d'établir que la propriété $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in E$. On pose donc x un élément quelconque de l'ensemble E et on montre pour ce x que $\mathscr{P}(x)$ est vérifiée.

✎ **En pratique** ✎ On écrira SANS RÉFLÉCHIR :

« $\underbrace{\text{Soit } x \in E}_{\text{Introduction de la variable } x}$. Montrons que $\mathscr{P}(x)$ est vraie.

$\vdots \quad \}$ Preuve de $\mathscr{P}(x)$.

Exemple 37 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est géométrique de raison 2. Autrement dit, il s'agit d'établir l'assertion « $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n$ ».

En effet, Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons que $u_{n+1} = 2u_n$. Or $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2u_n$.

✎ **En pratique** ✎ **Le principe de substitution.** Lorsque une assertion est universelle en une variable x, *i.e.* vraie « POUR TOUT x », on est en droit de substituer à la variable x N'IMPORTE QUELLE VALEUR DE NOTRE CHOIX.

Ce principe est notamment fécond pour établir des inégalités en série comme l'illustre l'exemple qui suit.

Exemple 38 – Inégalité triangulaire généralisée

- **Point de départ.** L'inégalité triangulaire affirme que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}, \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|$.
- **Premier rebondissement.** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, appliquons l'inégalité triangulaire à x et $-y$. On obtient
$$|x + (-y)| \leqslant |x| + |-y|$$
ce qui équivaut à
$$|x - y| \leqslant |x| + |y|,$$
qui est bien un nouveau résultat.
- **Second rebondissement.** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, appliquons l'inégalité triangulaire à $x + y$ et $-y$. On obtient
$$\begin{aligned} & |(x+y) + (-y)| \leqslant |x+y| + |-y| \\ \iff \quad & |x| \leqslant |x+y| + |y| \\ \iff \quad & |x| - |y| \leqslant |x+y|, \end{aligned}$$
qui est aussi un nouveau résultat.
- **Rebondissement sur le second rebondissement.** Or, en échangeant les rôles de x et y dans le résultat précédent, on obtient aussi que
$$|y| - |x| \leqslant |y + x| = |x + y|.$$
Ainsi le réel $|x + y|$ majore les deux nombres opposés $|x| - |y|$ et $|y| - |x|$ et donc leur valeur absolue, soit
$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x + y|.$$

Ces substitutions successives ont permis de montrer que l'inégalité triangulaire porte en germe un peu plus qu'elle-même. En l'occurrence,
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \big||x| - |y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y| \qquad \textit{(inégalité triangulaire généralisée).}$$

3.2 Prouver une proposition existentielle « $\exists x \ \mathscr{P}(x)$ »

Pour montrer une proposition existentielle, *i.e.* du type « $\exists x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$ », il suffit d'exhiber un élément x_0 de E qui vérifie $\mathscr{P}$, autrement dit tel que $\mathscr{P}(x_0)$ soit vraie.

✎ **En pratique** ✎ Si l'on a déjà en tête un exemple d'objet $x \in E$ vérifiant $\mathscr{P}$, on écrira SANS RÉFLÉCHIR :

« Posons/Notons $x =$ l'objet auquel on a pensé. Vérifions que $\mathscr{P}(x)$. »

$\vdots \quad \}$ Vérification que x satisfait la propriété $\mathscr{P}(x)$.

Exemple 39 $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \exists z \in \mathbb{R}, \quad z > x + y.$

En effet, on observe sans difficulté que $z = x + y + 1$ convient toujours. On écrit alors :

« Soit $x, y \in \mathbb{R}$, le réel $z = x + y + 1$ vérifie $z > x + y$. »

La difficulté consiste souvent, bien sûr, non pas à vérifier que x_0 convient, mais à avoir l'idée d'un tel objet x_0, or il n'existe pas de règle pour avoir des idées ! Nous reviendrons tout de même sur ce point au paragraphe 4.4 avec l'analyse-synthèse.

3.3 Prouver une implication « $p \implies q$ »

Sans surprise (cf. remarque 6), le principe est le suivant : on suppose que l'assertion p est vraie et on en déduit la véracité de l'assertion q.

✎ **En pratique** ✎ On écrira SANS RÉFLÉCHIR :

« Supposons p. Montrons que q est vraie.

$\left.\vdots\quad\right\}$ Preuve de q.

Remarque 40 Dans certaines situations, il peut être plus simple de montrer l'implication contraposée (cf. paragraphe 4.2). Y penser lorsque l'on bloque !

3.4 Prouver une équivalence « $p \iff q$ »

Il y a ici deux façons de procéder :

- **Par double implications :** on prouve en deux temps « $p \implies q$ » et sa réciproque « $q \implies p$ », ce qui nous ramène au paragraphe précédent.
- **Par équivalences successives :** en transformant peu à peu p en q. Dans ce second cas, on veillera à raisonner dans le sens direct, puis à s'assurer scrupuleusement que l'on peut « remonter » toutes les implications dans le sens indirect.

3.5 Prouver une conjonction « p et q »

On procède, sans surprise aussi, en deux temps : on prouve p, puis on prouve q.

Remarque 41 Rappelons que les assertions « non $(p \implies q)$ » et « p et (non q) » sont logiquement équivalentes. Ainsi, montrer qu'une implication « $p \implies q$ » est FAUSSE revient à établir la véracité d'une conjonction.

Exemple 42 Il est faux que « $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y \implies \sin x \leqslant \sin y$ ». Autrement dit la fonction sinus n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

En effet, il s'agit de montrer que « $\exists x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y$ et $\sin x > \sin y$ ». Il suffit par exemple de considérer $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $y = \pi$, pour lesquels $x < y$ et $\sin x = 1 > 0 = \sin y$.

3.6 Prouver une disjonction « p ou q »

Rappelons que les assertions « p ou q » et « (non p) $\implies q$ » sont logiquement équivalentes (cf. théorème 11). Ainsi, dire que de deux propositions l'une est vraie, c'est dire que si l'on suppose fausse l'une fixée des deux, alors l'autre est nécessairement vraie.

✎ **En pratique** ✎ Pour établir une disjonction « p ou q », on suppose que p est fausse et on en déduit la véracité de q (on s'est ramené à une implication) – les rôles de p et q étant évidemment interchangeables. Un choix pertinent de la propriété niée peut d'ailleurs parfois simplifier la démonstration ! (cf. exemple 14).

4 Modes de raisonnement

Cette ultime section présente un certain nombre de méthodes classiques de démonstration.

4.1 Modus ponens

✎ **En pratique** ✎ **(Modus ponens)** Pour que q soit vraie, il suffit que p soit vraie et de disposer de l'implication « $p \implies q$ ». Soit formellement :

$$(p \text{ et } (p \implies q)) \implies q.$$

Il s'agit d'une formalisation du « donc », *i.e.* de la déduction logique, qui permet d'établir la véracité de q, à partir de celle de p :

p est vraie ET l'implication « $p \implies q$ » est vraie, DONC q est vraie.

✖ **Attention !** ✖ Il est EXCLU d'utiliser la flèche d'implication $\implies$ pour signifier « donc », ce n'est pas là son sens.

La situation typique d'utilisation du modus ponens est l'emploi d'un théorème : celui-ci s'écrit « $p \implies q$ », où p est l'hypothèse et q la conclusion. Ainsi, pour montrer q, on vérifie que l'hypothèse p est satisfaite, et on emploie le théorème « $p \implies q$ ». Le *modus ponens* nous permet d'affirmer que la conclusion q est vraie aussi. En pratique, on veillera donc toujours, lorsque l'on recourt à un théorème, à préciser ce dernier (en donnant son nom) d'une part et la validité des hypothèses d'autre part.

4.2 Raisonnement par la contraposée/l'absurde

La démonstration par la contraposée repose sur l'équivalence des assertions « $p \implies q$ » et « $(\text{non } q) \implies (\text{non } p)$ » (cf. théorème 11).

✎ **En pratique** ✎ **(Démonstration par contraposée)** Pour établir l'implication « $p \implies q$ », on peut supposer que la conclusion q est fausse et en déduire que l'hypothèse p l'est alors également, ce qui revient à montrer la contraposée « $(\text{non } q) \implies (\text{non } p)$ ».

L'intérêt de ce raisonnement apparait lorsqu'il s'avère plus aisé de partir d'hypothèses liées à q (« non q » en l'occurrence) pour aboutir à démontrer un résultat lié à p (« non p » en l'occurrence).

Exemple 43 Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer l'assertion « $(\forall \varepsilon > 0, \quad |a| \leqslant \varepsilon) \implies a = 0$ ».

✖ **Attention !** ✖ On veillera à ne pas confondre la contraposée « $(\text{non } q) \implies (\text{non } p)$ » avec l'implication « $(\text{non } p) \implies (\text{non } q)$ ». Cette dernière n'est pas équivalente à « $p \implies q$ » mais à sa réciproque « $q \implies p$ » !

Le raisonnement par l'absurde est un cas particulier important du raisonnement par la contraposée, celui pour lequel p est l'assertion toujours vraie, auquel cas « non p » est celle toujours fausse, *i.e.* une *contradiction.* En effet, formellement

$$q \equiv (V \implies q) \equiv ((\text{non } q) \implies F).$$

Le raisonnement par l'absurde consiste en quelque sorte à prêcher le faux pour savoir le vrai. Le principe du raisonnement par l'absurde s'énonce finalement ainsi :

« Si d'une proposition on arrive à tirer une contradiction, alors elle est fausse. »

✎ **En pratique** ✎ **Raisonnement par l'absurde.** Pour démontrer q, il suffit de montrer que supposer « non q » conduit à une contradiction.

Exemple 44 Les deux résultats classiques suivants, respectivement dus à Pythagore[†] et Euclide[‡], se démontrent par l'absurde.

(i) $\sqrt{2}$ est irrationnel. **(ii)** Il existe une infinité de nombres premiers.

†. Pythagore (vers 580 av. J.-C. à Samos – vers 495 av. J.-C. à Métaponte) est un réformateur religieux, philosophe présocratique et mathématicien, dont aucun écrit ne nous est parvenu.

‡. Euclide (300 av. J.-C. ?) est un mathématicien de la Grèce antique, auteur des *Éléments de mathématiques*, qui constituent l'un des textes fondateurs de cette discipline en Occident.

4.3 Raisonnement par disjonction de cas

Quand une assertion $\mathscr{P}(x)$ dépend d'une variable x à valeurs dans un ensemble E, il peut être pertinent de « découper » l'ensemble E en sous-ensembles, afin de distinguer différents cas. Pour établir la véracité de $\mathscr{P}$, il suffit d'établir que $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour tout x appartenant à chacun des sous-ensembles choisis pour « découper » E.

Formellement, ce principe repose sur l'équivalence logique suivante :

$$(p \text{ ou } q) \implies r \quad \equiv \quad (p \implies r) \text{ et } (q \implies r).$$

Souvent, la discussion n'apparaît pas de façon explicite, mais sa nécessité intervient de façon naturelle au cours de la démonstration. Ces discussions permettent souvent de gérer des cas particuliers pour lesquels la démonstration générale n'est pas valide, ou alors de séparer l'ensemble des possibilités en plusieurs classes sur lesquelles la démonstration ne s'effectue pas tout à fait de la même manière.

Exemple 45 Montrer que, pour tout entier n, l'entier $n(n+1)$ est pair.

4.4 Analyse-Synthèse

Ce procédé de démonstration est surtout adapté pour les problèmes existentiels (montrer l'existence d'un objet vérifiant un certain nombre de propriétés) ou pour déterminer l'ensemble des éléments d'un ensemble E qui satisfont une propriété $\mathscr{P}$.

✎ **En pratique** ✎ **(Analyse-Synthèse.)**

- **Phase d'analyse.** On suppose dans un premier temps l'existence d'un objet tel que souhaité, et à l'aide des propriétés qu'il est censé vérifier, on obtient autant d'informations que possible sur la façon de construire un tel objet. Cette phase consiste ainsi à restreindre le champ des solutions envisageables.
- **Phase de synthèse.** Lorsque l'on a suffisamment d'informations sur une façon de construire l'objet recherché, on construit un objet de la sorte, de façon explicite, et on vérifie qu'il répond au problème.
- **Bonus.** Si la phase d'analyse fournit une expression explicite de l'objet recherché, ne laissant pas le choix pour cet objet, cela fournit même l'unicité.

La phase d'analyse consiste en la recherche des conditions nécessaires, tandis que la phase de synthèse correspond à la vérification de conditions suffisantes. À l'issue de ce double mouvement, on a déterminé tous les éléments que l'on souhaitait caractériser.

Exemple 46 Une analyse-synthèse est au fond ce que l'on met implicitement en œuvre à chaque fois que l'on résout une équation. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

ANALYSE :
Les seules solutions possibles sont -1 et 4.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+5} = x-1 \quad &\implies \quad x+5 = (x-1)^2 \\ &\iff \quad x^2 - 3x - 4 = 0 \\ &\overset{\Delta=25}{\iff} \quad x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 4. \end{aligned}$$

SYNTHÈSE :
seul 4 est effectivement solution.

Exemple 47 Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(y - f(x)) = 2 - x - y$.

Remarque 48 Le raisonnement par analyse-synthèse est souvent employé pour montrer les propositions de la forme « $\exists! x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$ ». Établir une telle assertion revient en effet à chercher les éléments de E qui satisfont la propriété $\mathscr{P}$ et obtenir *in fine* qu'il en existe un et un seul.

ANALYSE = UNICITÉ

SYNTHÈSE = EXISTENCE

Il est alors primordial de comprendre que dans le déroulement de ce raisonnement, l'analyse est une amorce de la synthèse au sens où cette dernière ne consiste qu'à vérifier que les objets construits lors de l'analyse existent effectivement. En bref, DANS L'ANALYSE-SYNTHÈSE, LA PREUVE DE L'UNICITÉ EST DÉJÀ UNE MANIÈRE D'ABORDER L'EXISTENCE.

✖ **ATTENTION !** ✖ Lorsque vous raisonnez par analyse-synthèse, il est vivement recommandé de le mentionner explicitement. En effet, comme la phase d'analyse consiste en une recherche de conditions nécessaires, elle revient essentiellement à supposer la conclusion vraie afin d'essayer d'obtenir le maximum d'informations sur l'objet recherché. Un lecteur pressé (*e.g.* un correcteur de concours !) risquerait alors de prendre votre démonstration pour une pétition de principe, consistant à établir un résultat en le supposant vrai au départ !

4.5 Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence est un axiome de la construction de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, qui s'énonce ainsi :

$$[\mathscr{P}(0) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)))] \quad \implies \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}(n)).$$

Il indique que la vérification de la véracité pour une propriété $\mathscr{P}(n)$, dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$, de $\mathscr{P}(0)$ (étape d'initialisation) et de l'assertion « $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1))$ » (étape d'hérédité) permet d'assurer que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tous les rangs $n \in \mathbb{N}$.

✎ **En pratique** ✎ **Récurrence simple.** Pour montrer une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$, on peut procéder selon le schéma suivant :

- **Initialisation.** Montrer que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(n+1)$, ce qui se fait, en vertu des principes précédemment développés, en posant n quelconques (« Soit $n \in \mathbb{N}$ »), en supposant que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour ce n, et en montrant qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
- **Conclusion.** Conclure en faisant référence au principe de récurrence.

✖ ATTENTION ! ✖ Il faut se montrer vigilant concernant la rédaction de l'introduction de l'étape d'hérédité. Les deux rédactions suivantes sont notamment proscrites.

- Commencer l'hérédité par « Supposons que, POUR TOUT $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie » est une erreur gravissime. En effet, si l'on suppose la propriété vraie à TOUS les rangs, que reste-t-il à prouver ?
- La rédaction suivante est moins fautive, mais reste incorrecte pour autant : « Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie POUR UN CERTAIN $n \in \mathbb{N}$ ». En effet, la traduction formelle de cet énoncé est « $\exists n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}(n)$ », qui ne correspond pas à la bonne quantification en « $\forall n \in \mathbb{N}$ ».

Exemple 49 Montrer que tout entier est pair ou impair.

Il arrive parfois que l'on doive utiliser la propriété aux k rangs précédents ($k \in \mathbb{N}^*$ fixé) pour établir l'hérédité. Le principe de récurrence prend alors la forme suivante

$$[(\mathscr{P}(0) \text{ et } \dots \text{ et } \mathscr{P}(k-1)) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathscr{P}(n) \text{ et } \dots \text{ et } \mathscr{P}(n+k-1) \implies \mathscr{P}(n+k)))] \implies (\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}(n)),$$

variante nommée *récurrence d'ordre k.*

✎ **En pratique** ✎ **Récurrence d'ordre k.** On utilise la propriété aux k rangs précédents pour établir l'hérédité, soit le schéma de rédaction suivant :

- **Initialisation.** Montrer que $\mathscr{P}(0), \dots, \mathscr{P}(k-1)$ sont vraies.
- **Hérédité.** Poser n quelconques (« Soit $n \in \mathbb{N}$ »), supposer que $\mathscr{P}(n), \dots, \mathscr{P}(n+k-1)$ sont vraies et en déduire alors $\mathscr{P}(n+k)$.
- **Conclusion.** Conclure en faisant référence au principe de récurrence.

Exemple 50 Soit (u_n) la suite réelle définie par $\begin{cases} u_0 = 4, u_1 = 5 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3$.

Il arrive enfin parfois que l'on ne sache déduire la propriété à un rang donné qu'à l'aide de TOUS les rangs antérieurs. Le principe de récurrence prend alors la forme suivante

$$[\mathscr{P}(0) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathscr{P}(k)) \implies \mathscr{P}(n+1))] \implies (\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}(n)),$$

variante nommée *récurrence forte.*

✎ **En pratique** ✎ **Récurrence forte.** On suppose la propriété vraie à tous les rangs précédents pour la montrer à un rang donné, soit le schéma de rédaction suivant :

- **Initialisation.** Montrer que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Poser n quelconques (« Soit $n \in \mathbb{N}$ »), supposer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie et en déduire alors $\mathscr{P}(n+1)$.
- **Conclusion.** Conclure en faisant référence au principe de récurrence.

Exemple 51 Montrer que tout entier $n \geqslant 2$ admet une décomposition en produit de nombres premiers.

Remarque 52 Les trois principes de récurrence exposés ci-dessus s'adapte évidemment au cas où le rang initial n'est pas 0.

Pas de méprise toutefois, les principes de récurrence d'ordre k et de récurrence forte ne sont pas plus « puissants » que le principe de récurrence simple, comme l'indique le théorème suivant. Il s'agit seulement d'une adaptation du principe de base, afin d'en rendre l'usage plus commode.

Théorème 53
Les trois principes de récurrence ci-dessus sont équivalents.

Démonstration. La récurrence forte et celle d'ordre k impliquent chacune la récurrence simple – principe du « qui peut le plus, peut le moins ». Réciproquement, il suffit de poser respectivement « $\mathscr{Q}(n) = (\mathscr{P}(0) \text{ et } \dots \text{ et } \mathscr{P}(n))$ » ou « $\mathscr{Q}(n) = (\mathscr{P}(n) \text{ et } \dots \text{ et } \mathscr{P}(n+k-1))$ » et d'appliquer le principe de récurrence simple à $\mathscr{Q}$. ■

Compétences à acquérir

- Savoir écrire formellement un énoncé mathématique et inversement : exercices 7 à 9.
- Savoir écrire la négation d'un énoncé formel : exercices 2, 5 et 9.
- Connaître les principes généraux pour démontrer une proposition universelle/existentielle, une implication, une équivalence, une conjonction et une disjonction.
- Maitriser les principes du raisonnement par la contraposée/l'absurde, par disjonction de cas, par analyse-synthèse et par récurrence : exercices des pages 2 et 3.