

29 | Déterminants

Dans l'ensemble de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ [†]

1 Aire et volume algébriques

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on appelle *parallélogramme engendré par le couple de vecteurs* (u, v) , avec $u, v \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble $\{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in [0, 1]\}$.



Pour définir l'aire d'un tel parallélogramme, il suffit de se donner une unité de mesure. Précisément, on fixe une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ et on décide que le parallélogramme engendré par le couple de vecteurs (e_1, e_2) est notre unité d'aire, *i.e.* que ce parallélogramme est d'aire algébrique égale à 1. L'aire algébrique d'un parallélogramme quelconque est alors calculée en fonction de l'aire de cette unité de mesure et on notera $\mathcal{A}(u, v)$ l'aire algébrique du parallélogramme engendré par le couple de vecteurs (u, v) . En particulier,

$$\mathcal{A}(v, u) = -\mathcal{A}(u, v),$$

cette permutation correspondant justement à un changement d'orientation. Par ailleurs, lorsque u et v sont colinéaires, le parallélogramme engendré par le couple de vecteurs (u, v) est aplati et on a donc $\mathcal{A}(u, v) = 0$. Avec cette définition, on retrouve les propriétés usuelles des aires algébriques, comme l'indique les exemples ci-contre :

- **Multilinéarité.** L'application $\mathcal{A}$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables. Précisément, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ fixé, $x \mapsto \mathcal{A}(x, u)$ et $x \mapsto \mathcal{A}(u, x)$ sont linéaires.
- **Antisymétrie.** Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(v, u) = -\mathcal{A}(u, v)$.
- **Caractérisation des bases (caractère alterné).** (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\mathcal{A}(u, v) \neq 0$, *i.e.* le parallélogramme engendré par (u, v) est non aplati.

$$\mathcal{A}\left(\frac{3}{2}e_2, 2e_1\right) = \frac{3}{2} \times 2\mathcal{A}(e_2, e_1) = -3\mathcal{A}(e_1, e_2) = -3$$

$$\mathcal{A}(u + u', v) = \mathcal{A}(u, v) + \mathcal{A}(u', v)$$

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on peut procéder de même pour le volume des parallélépipèdes (engendrés par des triplets (u, v, w) de vecteurs de $\mathbb{R}^3$), en fixant une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ définissant l'unité de volume. On dispose à nouveau d'une forme volume $\mathcal{V}(u, v, w)$ jouissant de propriétés similaires à celles de $\mathcal{A}$. Par exemple :

- **Multilinéarité.** L'application $\mathcal{V}$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables. Précisément, pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ fixé, les applications $x \mapsto \mathcal{V}(x, v, w)$, $x \mapsto \mathcal{V}(u, x, w)$ et $x \mapsto \mathcal{V}(u, v, x)$ sont linéaires.
- **Antisymétrie.** Le signe de $\mathcal{V}(u, v, w)$ est changé dès que l'on permute deux vecteurs.
- **Caractérisation des bases (caractère alterné).** (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\mathcal{V}(u, v, w) \neq 0$, *i.e.* le parallélépipède engendré par ces trois vecteurs est non aplati.

2 Applications multilinéaires alternées

Dans l'ensemble de cette section, p désigne un entier naturel non nul et F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition 1 – Application multilinéaire

Soit $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f : E_1 \times \dots \times E_p \longrightarrow F$ une application.

- L'application f est dite *p-linéaire de $E_1 \times \dots \times E_p$ dans F* lorsque, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et pour tout $(a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_p) \in E_1 \times \dots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \dots \times E_p$ fixé, l'application

$$x \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_p)$$

est linéaire de E_k dans F .

- **Cas particulier $F = \mathbb{K}$.** Une application p -linéaire de $E_1 \times \dots \times E_p$ dans $\mathbb{K}$ est appelée une *forme p-linéaire*.
- **Cas particulier $E_1 = \dots = E_p = E$.** Une application p -linéaire de E^p dans F est appelée une application *p-linéaire de E dans F* .
- **Cas particulier $p = 2$.** f est dite *bilinéaire*
- **Cas particulier $p = 3$.** f est dite *trilinéaire*

†. Tous les résultats énoncés dans ce chapitre demeurent vrais sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque.

En résumé, une application f est p -linéaire lorsque, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, elle est linéaire par rapport à sa k^{e} variable une fois fixé les $p - 1$ autres variables.

Exemple 2

- Les applications 1-linéaires sont les applications linéaires.
- L'application $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.
- L'application $(z_1, \dots, z_p) \mapsto z_1 \cdots z_p$ est une forme p -linéaire sur $\mathbb{C}$.
- Dans l'espace euclidien, le produit scalaire et le produit vectoriel sont bilinéaires.
- Pour tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , la multiplication externe $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ est bilinéaire de $\mathbb{K} \times E$ dans E .
- Le produit de fonctions $(f, g) \mapsto fg$ est bilinéaire de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- Le produit matriciel $(A, B) \mapsto AB$ est bilinéaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$.
- Pour tous $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels E, E' et E'' , la composition $(f, g) \mapsto g \circ f$ est bilinéaire de $\mathcal{L}(E, E') \times \mathcal{L}(E', E'')$ dans $\mathcal{L}(E, E'')$ (point (ii) du théorème 16 du chapitre 22).
- Pour tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , l'application $(f, x) \mapsto f(x)$ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \times E$.

Exemple 3 Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E . Soit f une application trilinéaire de E dans F et $x_1, x_2, x_3 \in E$, avec $x_l = \sum_{i=1}^n a_{i,l} e_i$, pour tout $l \in \{1, 2, 3\}$. On a alors

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f\left(\sum_{i=1}^n a_{i,1} e_i, \sum_{j=1}^n a_{j,2} e_j, \sum_{k=1}^n a_{k,3} e_k\right) = \sum_{i=1}^n a_{i,1} f\left(e_i, \sum_{j=1}^n a_{j,2} e_j, \sum_{k=1}^n a_{k,3} e_k\right) \dots \\ &\dots = \sum_{i=1}^n a_{i,1} \left(\sum_{j=1}^n a_{j,2} f\left(e_i, e_j, \sum_{k=1}^n a_{k,3} e_k\right) \right) = \sum_{i=1}^n a_{i,1} \left(\sum_{j=1}^n a_{j,2} \left(\sum_{k=1}^n a_{k,3} f(e_i, e_j, e_k) \right) \right) \dots \\ &\dots = \sum_{1 \leq i, j, k \leq n} a_{i,1} a_{j,2} a_{k,3} f(e_i, e_j, e_k). \end{aligned}$$

Remarque 4

- L'image d'un p -uplet dont un vecteur est nul par une application p -linéaire est elle-même nulle, *i.e.*

$$f(\dots, 0_{E_i}, \dots) = 0_F.$$

- On vérifie sans difficulté que l'ensemble des applications p -linéaires de $E_1 \times \dots \times E_p$ dans F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $E_1 \times \dots \times E_p$ dans F .

Définition 5 – Application p -linéaire alternée/antisymétrique

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f une application p -linéaire sur E à valeurs dans F .

- L'application f est dite *alternée* lorsqu'elle associe le vecteur nul de F à tout p -uplet de E^p dont deux des vecteurs sont égaux, *i.e.*

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad (i \neq j \text{ et } x_i = x_j) \implies f(x_1, \dots, x_p) = 0_F.$$

- L'application f est dite *antisymétrique* lorsque, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ et pour tous $i < j$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$,

$$f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p).$$

Remarque 6 Une application p -linéaire de E dans F est antisymétrique si et seulement si, pour toute transposition τ de $\mathfrak{S}_p$,

$$f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)}) = -f(x_1, \dots, x_p).$$

Théorème 7 – Propriétés des applications p -linéaires alternées

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f une application p -linéaire alternée sur E à valeurs dans F .

- (i) Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille liée de vecteurs de E , alors $f(x_1, \dots, x_p) = 0_F$.
- (ii) Pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, le vecteur $f(x_1, \dots, x_p)$ est inchangé si l'on ajoute à l'un des x_k une combinaison linéaire des autres.
- (iii) L'application p -linéaire f est antisymétrique et, plus généralement,

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p, \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_p, \quad f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p).$$

Démonstration. ...

Remarque 8 La réciproque du point (iii) du théorème précédent est vraie sur les corps $\mathbb{K}$ tels que $2 \neq 0$ (corps de caractéristique différente de 2). En effet, si f est une application p -linéaire antisymétrique de E dans F , alors, pour tous $x_1, \dots, x_p \in E$ tels que $x_i = x_j$ avec $i < j$, en notant τ la transposition (ij) ,

$$f(x_1, \dots, x_p) = f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)}) = -f(x_1, \dots, x_p),$$

soit $2f(x_1, \dots, x_p) = 0_F$.

Corollaire 9 – Expression d'une application n -linéaire alternée en dimension n

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et f une application n -linéaire alternée sur E à valeurs dans F . Si $x_1, \dots, x_n$ sont n vecteurs de E avec $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i} \right) f(e_1, \dots, e_n).$$

Démonstration. Avec les notations du corollaire,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n,n} e_{i_n}\right) \stackrel{n\text{-linéarité}}{=} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \llbracket 1, n \rrbracket^{\llbracket 1, n \rrbracket}} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &\stackrel{f \text{ alternée}}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \stackrel{\text{th. 7 (iii)}}{=} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i} \right) f(e_1, \dots, e_n) \end{aligned}$$

3 Déterminants d'une famille de vecteurs dans une base

Dans l'ensemble de cette section, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Le théorème suivant donne une description du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des formes n -linéaires alternées sur E .

Théorème 10 – Droite vectorielle des formes n -linéaires alternées sur un espace de dimension n

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E .

- (i) Il existe une unique forme n -linéaire alternée sur E prenant la valeur 1 en $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. On l'appelle *déterminant dans la base $\mathcal{B}$* et on la note $\det_{\mathcal{B}}$.
- (ii) Le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des formes n -linéaires alternées sur E est une droite vectorielle dont la famille $(\det_{\mathcal{B}})$ est une base, autrement dit toute forme n -linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$.
Précisément, si f est une forme n -linéaires alternées sur E , alors $f = f(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}$.

Démonstration. Admis conformément au programme (cf. annexe A).

Par définition, $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n -linéaire alternée f sur E telle que $f(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Définition-théorème 11 – Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E .

- **Définition.** On appelle *déterminant de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$* le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.
- **Formule de Leibniz[†].** Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ désigne la matrice de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}.$$

Démonstration. La formule de Leibniz découle directement du corollaire 9 et de l'égalité $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$. ■

✗ **ATTENTION !** ✗ La notion de déterminant d'une famille de vecteurs n'a de sens que pour une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n .

Théorème 12 – Déterminants en dimension 2 et 3

- (i) **Dimension 2.** Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B}$ une base de E . Si $x, y \in E$ sont de coordonnées respectives (x_1, x_2) et (y_1, y_2) dans $\mathcal{B}$, alors

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \det_{\mathcal{B}}(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

- (ii) **Dimension 3.** Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base de E . Si $x, y, z \in E$ sont de coordonnées respectives (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) et (z_1, z_2, z_3) dans $\mathcal{B}$, alors

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2 \quad (\text{règle de Sarrus}^\ddagger).$$

Démonstration. (i) $\det_{\mathcal{B}}(x, y) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} = \underbrace{x_1 y_2}_{\text{Id}} - \underbrace{x_2 y_1}_{(12)}.$

$$(ii) \quad \det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} z_{\sigma(3)} = \underbrace{x_1 y_2 z_3}_{\text{Id}} + \underbrace{x_2 y_3 z_1}_{(123)} + \underbrace{x_3 y_1 z_2}_{(132)} - \underbrace{x_3 y_2 z_1}_{(13)} - \underbrace{x_2 y_1 z_3}_{(12)} - \underbrace{x_1 y_3 z_2}_{(23)}.$$

Théorème 13 – Propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E (de dimension n) et $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E .

- (i) **Formule de changement de bases.** $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}$, i.e. $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{X})$.
- (ii) **Caractérisation des bases.** La famille $\mathcal{X}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) \neq 0$.
Le cas échéant, $\det_{\mathcal{X}}(\mathcal{B}) = (\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}))^{-1}$.

Démonstration. Avec les notations du théorème.

- (i) L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée sur E , on a donc $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}$ (point (ii) du théorème 10). Il suffit alors d'évaluer en $\mathcal{X}$.
- (ii) Si $\mathcal{X}$ est une base de E , alors, d'après le point précédent,

$$1 = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) \det_{\mathcal{X}}(\mathcal{B}),$$

ainsi $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})$ est inversible dans $\mathbb{K}$, et donc non nul, d'inverse $\det_{\mathcal{X}}(\mathcal{B})$. Réciproquement, par contraposition, si $\mathcal{X}$ n'est pas une base de E , alors la famille $\mathcal{X}$ est liée (famille de cardinal n en dimension n). Or $\det_{\mathcal{B}}$ est n -linéaire et alternée, ainsi $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) = 0$ (point (i) du théorème 7). ■

Exemple 14 La famille $((1, 2), (-4, 7))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

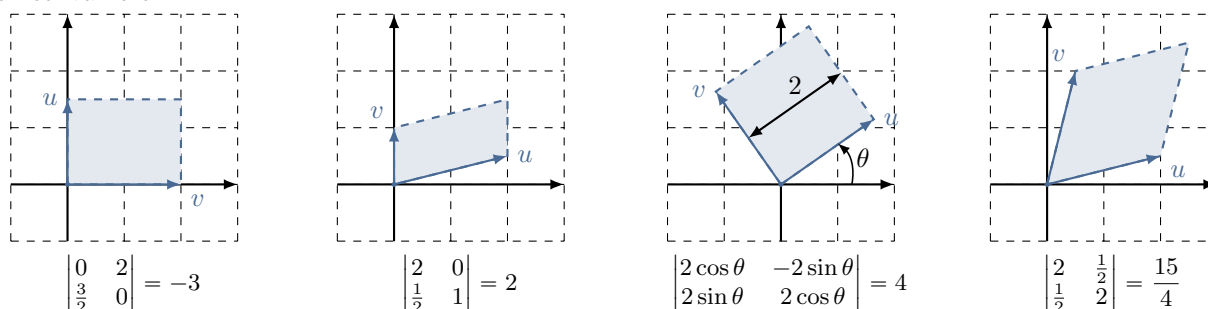
En effet, $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times 7 - 2 \times (-4) = 15 \neq 0$.

†. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 à Leipzig – 1716 Hanovre), est un philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand. On lui attribue généralement, avec Isaac Newton, l'invention du calcul infinitésimal.

‡. Pierre Frédéric Sarrus (1798 à Saint-Affrique – 1861 à Saint-Affrique) est un mathématicien français qui fut doyen de la faculté des Sciences de Strasbourg et dont les travaux portèrent sur les méthodes de résolution des équations numériques et sur le calcul des variations.

Interprétation du déterminant en termes d'aire/volume orientés

Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Nous pouvons convenir que le carré élémentaire que $\mathcal{B}$ engendre est d'aire algébrique 1 et on a justement $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. Il est donc raisonnable d'espérer, en lien avec la section introductive de ce chapitre, que l'application $\det_{\mathcal{B}}$ définisse une mesure de l'aire algébrique des parallélogrammes au sens le plus intuitif du terme. Les figures ci-dessous devraient vous en convaincre !



Le déterminant peut donc être interprété comme une généralisation en dimension finie quelconque des notions d'aire et de volume orientés en dimension 2 et 3.

Définition-théorème 15 – Orientation d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle. On définit sur l'ensemble des bases de E une relation binaire « avoir la même orientation que » de la façon suivante : pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E ,

$$\mathcal{B}' \text{ a la même orientation que } \mathcal{B} \text{ si et seulement si } \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0.$$

La relation ainsi définie est une relation d'équivalence qui partitionne l'ensemble des bases de E en deux classes d'équivalence : si $\mathcal{B}$ n'a pas la même orientation que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$, alors $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ ont la même orientation. Autrement dit, il existe exactement deux orientations possibles de E .

Orienter E consiste à choisir arbitrairement une de ces deux orientations, i.e. à choisir une base $\mathcal{B}$ de E . Toutes les bases de E de même orientation que $\mathcal{B}$ sont alors qualifiées de *directes* et les autres d'*indirectes*.

Démonstration. ...

À présent, l'orientation d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel repose sur l'idée que ses bases sont de deux sortes, le choix d'une orientation étant totalement arbitraire. Cet arbitraire n'est pas vraiment surprenant cela dit, vous n'appréciez pas l'orientation d'un plan de la même façon selon que vous vous placez au-dessus ou au-dessous de lui (les bases qui paraissent directes d'un côté paraissent indirectes de l'autre). La notion d'orientation ne s'en trouve pas ruinée pour autant, dans la mesure où deux bases qui ont la même orientation quand on regarde le plan d'en haut ont aussi la même orientation quand on le regarde d'en bas, et c'est là l'essentiel !

Exemple 16 Toute permutation paire (resp. impaire) sur les vecteurs d'une base fournit une base de même orientation (resp. d'orientation contraire).

Remarque 17 Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est dit *muni de son orientation canonique* lorsque sa base canonique est considérée directe.

4 Déterminant d'une matrice carrée**4.1 Définition et premières propriétés****Définition 18 – Déterminant d'une matrice carrée**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *déterminant de A* , noté $\det(A)$, le déterminant de la famille des colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, ainsi

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}.$$

On note aussi $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ le déterminant de la matrice A .

⚠ ATTENTION ! ⚠ La notion de déterminant n'a de sens que pour les matrices CARRÉES !

Exemple 19 $\det(I_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$, où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Remarque 20 La formule de Leibniz présente peu d'intérêt pour le calcul pratique des déterminants (cf. section 4.2 à ce sujet), mais elle permet d'établir divers résultats théoriques. Notamment, le déterminant d'une matrice est une expression polynomiale en ses coefficients.

Théorème 21 – Lien entre le déterminant d'une matrice carrée et celui d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E . Si $\mathcal{X}$ une famille de n vecteurs de E , alors

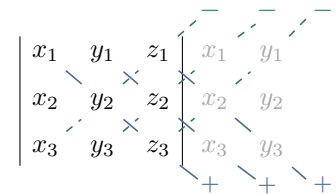
$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})).$$

Démonstration. Découle directement des définitions : les colonnes de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})$ sont exactement les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{X}$ dans la base $\mathcal{B}$ et les déterminants s'obtiennent par la même formule. ■

Exemple 22 En lien avec le théorème 12, pour tous $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{K}$, $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$ et

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2 \quad (\text{règle de Sarrus}).$$

Remarque 23 On peut retrouver la règle de Sarrus en répétant les deux premières colonnes du déterminant à la suite de la troisième. Les 6 termes du déterminants de taille 3 sont alors les produits respectifs des termes des 6 diagonales qui apparaissent, que l'on affuble d'un signe selon le schéma ci-contre.



Toutefois on peut aussi lire ces produits de coefficients « diagonaux » directement sur le déterminant de taille 3, comme l'indique les schémas ci-dessous.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Diagonales descendantes affectées du signe +

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Diagonales ascendantes affectées du signe -

✗ **ATTENTION !** ✗ La règle de Sarrus est seulement valable pour les déterminants de taille 3!

Théorème 24 – Premières propriétés du déterminant d'une matrice carrée

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) **Multilinéarité par rapport aux colonnes.** L'application $A \mapsto \det A$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est n -linéaire et alternée par rapport aux colonnes de A .

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$. **ATTENTION !**

(ii) **Déterminant d'un produit.** $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

(iii) **Caractérisation de l'inversibilité.** A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

En outre, le cas échéant, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

(iv) **Invariance par similitude.** Deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont même déterminant. Autrement dit, le déterminant est un invariant de similitude.

(v) **Invariance par transposition.** $\det(A^T) = \det A$.

A fortiori, l'application $A \mapsto \det A$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est également n -linéaire et alternée par rapport aux lignes de A .

Démonstration. ... ■

✗ **ATTENTION !** ✗ Le déterminant n'est PAS une application linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$! En général, si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\lambda A + \mu B) \neq \lambda \det A + \mu \det B$.

Exemple 25 Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont même rang, même trace et même déterminant, mais ne sont pas semblables pour autant. En effet, $A^2 = 0 \neq B^2$.

Remarque 26

- D'après les points (ii) et (iii), le déterminant induit un morphisme de groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$. On montre sans difficulté qu'il est surjectif, en considérant par exemple les matrices $\text{Diag}(x, 1, \dots, 1)$, avec $x \in \mathbb{K}^*$.
- D'après le point (ii), bien que le produit matriciel ne soit pas commutatif en général,

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(AB) = \det(BA).$$

- Du fait de son caractère multilinéaire et alterné, le déterminant d'une matrice est nul dans les cas suivants :
 - × la matrice possède une colonne (resp. ligne) nulle ;
 - × la matrice possède deux colonnes (resp. lignes) identiques ;
 - × plus généralement, la matrice possède une colonne (resp. ligne) combinaison linéaire d'autres colonnes (resp. lignes).

- L'invariance du déterminant par transposition s'écrit aussi
$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}.$$

Théorème 27 – Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Pour tous $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K}), \dots, A_r \in \mathcal{M}_{n_r}(\mathbb{K})$.

$$\begin{vmatrix} A_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & A_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & & \\ * & \ddots & \\ * & * & A_r \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^r \det(A_i).$$

En particulier, le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Démonstration. Cf. annexe A. ■

Exemple 28
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-14) \times (-1) = 14 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times (-1) = -2.$$

4.2 Deux méthodes de calcul des déterminants

La formule de Leibniz avec sa somme de $n!$ termes devient rapidement laborieuse pour le calcul du déterminant d'une matrice carrée de taille n . Cette section est dévolue à la présentation de deux méthodes alternatives pour les calculs des déterminants.

4.2.1 Calcul de déterminant par la méthode du pivot

Théorème 29 – Déterminant d'une matrice vs opérations élémentaires

Soit $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (i) Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ ne modifient pas les déterminants.
- (ii) Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $C_i \leftarrow \lambda C_i$ multiplient les déterminants par λ .
- (iii) Les opérations élémentaires $L_i \leftrightarrow L_j$ et $C_i \leftrightarrow C_j$ multiplient les déterminants par -1 .

Démonstration. Le déterminant étant invariant par transposition, il suffit d'établir ces résultats sur les colonnes. Or ces derniers sont une conséquence de la linéarité du déterminant par rapport à la i^e colonne d'une matrice et de son caractère alterné. ■

Exemple 30

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_4}} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 4 \end{vmatrix} \times 1 = - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -11 & -9 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}} -1 \times \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -11 & -9 \end{vmatrix} = -(9 - 11) = 2.$$

Exemple 31 Pour tous $a, b \in \mathbb{K}$,

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3} (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a-b & 0 \\ b & 0 & a-b \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}} (a-b)^2(a+2b).$$

En particulier, la matrice $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $a \notin \{b, -2b\}$.

4.2.2 Développement par rapport à une rangée, formule d'inversion

On développe à présent une nouvelle stratégie de calcul des déterminants. Si l'on note $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors, pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, en notant $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de A ,

$$\det A = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n) = \det_{\mathcal{B}}\left(\dots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_{ij} E_i, C_{j+1}, \dots\right) \stackrel{n\text{-linéarité}}{=} \sum_{i=1}^n a_{ij} \det_{\mathcal{B}}(\dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots)$$

$$\dots = \sum_{i=1}^n a_{ij} \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots \\ \dots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \dots \\ \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}_{[n]} = \sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} a_{ij} \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots \\ 1 & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots \\ 0 & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}_{[n]}$$

On échange la j -ème colonne avec la $(j-1)$ -ième, puis la $(j-1)$ -ième avec la $(j-2)$ -ième, etc. Au total, $j-1$ échanges de colonnes, d'où le $(-1)^{j-1}$.

$$\dots = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (-1)^{j-1} a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots \\ 0 & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}_{[n]} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots \\ \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

Mêmes échanges sur les lignes.
La matrice obtenue est triangulaire par blocs.

Déterminant de la matrice extraite de A par suppression de sa i -ème ligne et j -ème colonne.

Bilan : un déterminant de taille n peut être calculé comme une combinaison linéaire de n déterminants de taille $n-1$. Précisément, les déterminants de taille $n-1$ que nous avons fait apparaître ne sont jamais que des déterminants de la matrice A à laquelle on a supprimé une ligne et une colonne. La définition suivante va nous permettre de clarifier cet énoncé.

Définition 32 – Mineurs, cofacteurs, comatrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- On appelle *mineur de A de position (i, j)* le déterminant de la matrice extraite de A par suppression de la i -ème ligne et la j -ème colonne. Nous le noterons $\Delta_{ij}(A)$ dans ce cours, mais cette notation n'est pas universelle.
- On appelle *cofacteur de A de position (i, j)* le scalaire $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}(A)$.
- On appelle *comatrice de A* , notée $\text{Com}(A)$, la matrice des cofacteurs de A : $\text{Com}(A) = ((-1)^{i+j} \Delta_{ij}(A))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Le cofacteur de position (i, j) est égal, au signe près, au mineur de même position. Reste à savoir comment sont distribués ces signes, ce que schématise la matrice ci-contre.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Exemple 33 La comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, comme on peut le vérifier de tête.

Remarque 34

- Le mineur et le cofacteur de position (i, j) d'une matrice carrée A sont indépendants des éléments de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne de A .
- D'après le calcul effectué en introduction, le cofacteur de position (i, j) d'une matrice carrée A vérifie :

$$(-1)^{i+j} \Delta_{ij}(A) = \det(A + E_{i,j}) - \det A.$$

Finalement, nous avons établi en introduction de ce paragraphe le théorème suivant.

Théorème 35 – Développement par rapport à une rangée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Développement par rapport à une ligne.** Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}(A)$.
- Développement par rapport à une colonne.** Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}(A)$.

Exemple 36 Le fonctionnement de ces formules se comprend sur des exemples simples. En voici un, où l'on développe un déterminant de taille 3 par rapport à sa première colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = + \textcircled{1} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} - \textcircled{2} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + \textcircled{3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette étape explicative ne doit pas figurer lors de votre rédaction.

En particulier, la matrice considérée n'est pas inversible.

En pratique Le développement par rapport à une ligne/colonne est souvent utile, mais, dans la mesure du possible, il faut choisir de développer par rapport à une ligne/colonne contenant beaucoup de zéros. En règle générale, pour une matrice dont les coefficients sont littéraux, il est conseillé de privilégier la méthode du pivot, qui fournit davantage de résultats sous forme factorisée. Après tout, ce que l'on veut savoir d'un déterminant est généralement s'il est nul ou non.

Exemple 37

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \left((-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) + \left(-(-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = 4.$$

(3^e colonne) (1^{re} colonne) (1^{re} colonne)

En pratique Un développement par rapport à une ligne/colonne permet souvent d'obtenir une relation de récurrence pour une suite de déterminants indexée par leur format.

Exemple 38 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}_{[n]} = 2^{n+1} - 1.$$

Théorème 39 – Formule d'inversion

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $A \text{Com}(A)^\top = \text{Com}(A)^\top A = \det(A) I_n$. En particulier, si A est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Com}(A)^\top.$$

Démonstration. ...

Exemple 40 Pour tout $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, si $\det A = ad - bc \neq 0$, alors on retrouve le résultat bien connu (théorème 65 du chapitre 12)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Com}(A)^\top = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

❌ **ATTENTION !** ❌ La formule d'inversion est fondamentale mais uniquement dans un contexte théorique. Il est *a priori* hors de question de s'en servir pour inverser une matrice concrète (excepté de taille 2). En effet, cette formule ramène le calcul de A^{-1} au calcul de $\det A$ et $\text{Com} A$, soit le calcul d'un déterminant de taille n et de n^2 déterminants de taille $n - 1$ – ce qui est fort coûteux en calculs.

Définition-théorème 41 – Matrice/Déterminant de Vandermonde

Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. La matrice

$$\left(x_i^{j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

est appelée *matrice de Vandermonde*[†] de $x_1, \dots, x_n$. Son déterminant, appelé *déterminant de Vandermonde*, est égal à

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

En particulier, la matrice de Vandermonde de $x_1, \dots, x_n$ est inversible si et seulement si les x_i sont distincts.

Démonstration. ...

Remarque 42 La condition nécessaire et suffisante concernant l'inversibilité des matrices de Vandermonde obtenue au théorème précédent peut être établie indépendamment du résultat concernant le déterminant de Vandermonde. Donnons deux idées de preuve, en commençant par remarquer que la condition nécessaire est évidente. Il suffit donc d'établir que si les x_i sont distincts, alors la matrice de Vandermonde est inversible.

1. Considérons l'application $\varphi : P \mapsto (P(x_1), \dots, P(x_n))$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$. Alors φ est un isomorphisme (pourquoi ?) et la matrice de Vandermonde de $x_1, \dots, x_n$ est la matrice de φ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et de $\mathbb{K}^n$.
2. Pour tous $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$, la matrice des coefficients du système d'équations linéaires $P(x_i) = y_i$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, d'inconnues les coefficients de $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, est la matrice de Vandermonde de $x_1, \dots, x_n$. Or ce système est de Cramer (son unique solution est donnée par le polynôme d'interpolation de Lagrange).

5 Déterminant d'un endomorphisme

Définition-théorème 43 – Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle et $f \in \mathcal{L}(E)$. Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ de E choisie ; on l'appelle *déterminant de f* et on le note $\det(f)$.

Démonstration. Pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E , les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ sont semblables, leurs déterminants sont donc égaux (point (iv) du théorème 24).

❌ **ATTENTION !** ❌ La notion de déterminant n'a de sens que pour les ENDOMORPHISMES !

Remarque 44 À l'instar des matrices, le déterminant d'un endomorphisme n'est plus relatif au choix d'une base de E , contrairement au déterminant d'une famille de vecteurs.

[†]. Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 à Paris – 1796 à Paris) est un mathématicien français qui a notamment contribué au fondement de la théorie des déterminants (*Mémoire sur l'élimination* publié 1772, au sein duquel le déterminant de Vandermonde n'apparaît toutefois pas explicitement).

Théorème 45 – Déterminant de l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si l'on note $\hat{A}$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A , alors $\det \hat{A} = \det A$.

Démonstration. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice A , il vient

$$\det \hat{A} = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\hat{A})) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n) = \det A.$$

Les propriétés du déterminant d'un endomorphisme sont, comme l'on peut s'y attendre, similaires à celles du déterminant d'une matrice.

Théorème 46 – Propriétés du déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

- (i) **Effet d'un endomorphisme sur le déterminant d'une famille de vecteurs.** Pour toute base $\mathcal{B}$ de E et pour toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ de n vecteurs de E , $\det_{\mathcal{B}}(f((x_1, \dots, x_n))) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.
- (ii) **Déterminant d'une composée.** $\det(g \circ f) = \det(g) \det(f)$.

ATTENTION !

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.

- (iii) **Caractérisation des automorphismes.** f est un automorphisme de E si et seulement si $\det(f) \neq 0$.
En outre, le cas échéant, $\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

- (i) Notons $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{X})) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{X}))) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}).$$

- (ii) $\det(g \circ f) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f)) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)) \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \det(g) \det(f)$.

En particulier : $\det(\lambda f) = \det((\lambda \text{Id}_E) \circ f) = \det(\lambda \text{Id}_E) \det(f) = \lambda^n \det(f)$.

- (iii) f est un automorphisme de E si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une base de E , ce qui équivaut à

$$\det(f) \underset{(i)}{=} \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \neq 0,$$

d'après la caractérisation des bases établie au théorème 13.

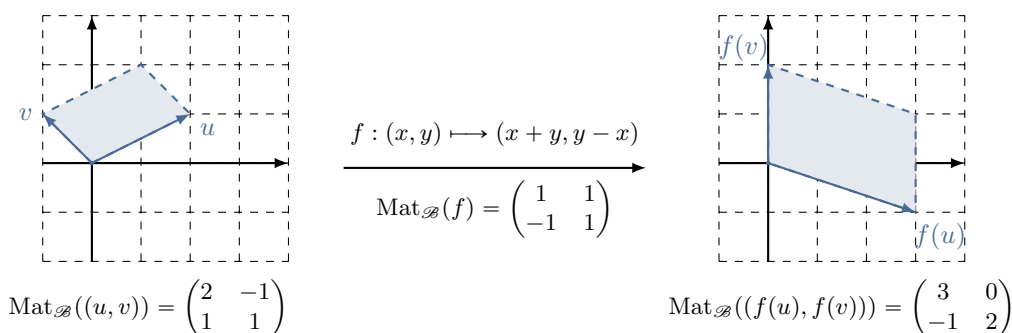
✗ **ATTENTION !** ✗ Le déterminant n'est PAS une application linéaire sur $\mathcal{L}(E)$!

En général, si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\det(\lambda f + \mu g) \neq \lambda \det f + \mu \det g$.

Remarque 47 À nouveau, le déterminant induit un morphisme de groupes surjectif de $\text{GL}(E)$ sur $\mathbb{K}^*$.

Remarque 48 – Interprétation en terme de volume orienté

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.



La relation matricielle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}((f(u), f(v))) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}((u, v))$ conduit à

$$6 = \det_{\mathcal{B}}(f(u), f(v)) = \det_{\mathcal{B}}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \times \det_{\mathcal{B}}(u, v) = \det(f) \times \det_{\mathcal{B}}(u, v) = 2 \times 3,$$

ainsi l'endomorphisme f agit sur les volumes orientés en les multipliant par un facteur $\det(f) = 2$.

Plus généralement, pour tout $f \in \text{GL}(E)$, les bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ de E ont même orientation si et seulement si $\det f > 0$.

Compétences à acquérir

- Calculer des déterminants via des opérations élémentaires et des développements selon une rangée (niveau 1) : exercices 1 à 7.
- Calculer des déterminants via des opérations élémentaires et des développements selon une rangée (niveau 2) : exercices 9 à 14.
- Calculer des déterminants par blocs : exercices 16 à 18.
- Utiliser le caractère n -linéaire et alterné du déterminant : exercices 27, 28 et 31.
- Utiliser la formule de Leibniz : exercices 25 et 26.
- Utiliser un développement selon une rangée : exercices 5, 6, 10, 14 et 24.
- Exploiter la définition et les propriétés de la comatrice : exercices 32 à 34.

Quelques résultats classiques :

- Déterminant et trace de l'endomorphisme $A \mapsto A^\top$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (exercice 22).
- Formules de Cramer (exercice 24).
- Deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$ le sont sur $\mathbb{R}$ (exercice 25).
- Propriétés de la comatrice (exercice 32).

A Annexe

Démonstration du théorème 10 (i) Notons φ l'application de E^n dans $\mathbb{K}$ définie par

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i},$$

où $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$ désigne les coordonnées de x_j dans $\mathcal{B}$, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- **Multilinéarité.** L'expression de φ permet de vérifier sans difficulté que φ est n -linéaire.
- **Caractère alterné.** Montrons que si l'on a $x_i = x_j$, pour $i \neq j$, alors $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.
En notant τ la transposition (ij) , on sait que l'ensemble des permutations impaires est $\mathfrak{A}_n \tau = \{\sigma\tau \mid \sigma \in \mathfrak{A}_n\}$. On peut donc écrire

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{\sigma(k), k} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} \prod_{k=1}^n a_{\sigma(k), k} - \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} \prod_{k=1}^n a_{\sigma\tau(k), k}$$

Or, sachant $x_i = x_j$,

$$a_{\sigma\tau(i), i} = a_{\sigma(j), i} = a_{\sigma(j), j}, \quad a_{\sigma\tau(j), j} = a_{\sigma(i), j} = a_{\sigma(i), i} \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \quad a_{\sigma\tau(k), k} = a_{\sigma(k), k},$$

ainsi

$$\prod_{k=1}^n a_{\sigma\tau(k), k} = \prod_{k=1}^n a_{\sigma(k), k}$$

et par suite $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$.

- **Calcul de $\varphi(\mathcal{B})$.** Par définition de φ ,

$$\varphi(e_1, \dots, e_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \delta_{\sigma(i), i} = \varepsilon(\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}) \prod_{i=1}^n \delta_{\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}(i), i} = 1,$$

car, ayant $\delta_{\sigma(i), i} \in \{0, 1\}$,

$$\prod_{i=1}^n \delta_{\sigma(i), i} = 1 \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \delta_{\sigma(i), i} = 1 \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sigma(i) = i \iff \sigma = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}.$$

- **Unicité.** D'après le corollaire 9, toute forme n -linéaire alternée f sur E est proportionnelle à φ , précisément

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i} \right) f(e_1, \dots, e_n) = f(e_1, \dots, e_n) \varphi(x_1, \dots, x_n),$$

soit $f = f(e_1, \dots, e_n) \varphi$. En particulier, si $f(e_1, \dots, e_n) = 1$, alors $f = \varphi$.

(ii) Notons $\det_{\mathcal{B}} = \varphi$. D'après le point précédent, la famille $(\det_{\mathcal{B}})$ engendre l'espace vectoriel des formes linéaires n -linéaires alternées sur E et cette dernière est libre, puisque $\det_{\mathcal{B}}$ n'est pas l'application nulle.

Démonstration du théorème 27

L'invariance par transposition permet de ne travailler qu'avec des matrices triangulaires supérieures par blocs.

• **Cas d'une matrice triangulaire.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure. Dans la relation $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}$, si le terme associé à une permutation σ est non nul, alors $a_{\sigma(i)i} \neq 0$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et donc $\sigma(i) \leq i$. Montrons par récurrence forte sur i que cela impose $\sigma(i) = i$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- *Initialisation.* $\sigma(1) \leq 1$ et $\sigma(1) \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc $\sigma(1) = 1$.
- *Hérédité.* Soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On suppose que $\sigma(j) = j$ pour tous $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$. Par hypothèse, $\sigma(i+1) \leq i+1$, mais nous savons par hypothèse de récurrence et injectivité de σ que $\sigma(i+1) \notin \llbracket 1, i \rrbracket$, d'où l'égalité annoncée.
- *Conclusion.* Si le terme associé à une permutation σ est non nul dans la définition de $\det(A)$, nécessairement $\sigma = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$.

Au total, $\det(A) = \varepsilon(\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}) \prod_{i=1}^n a_{\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}(i), i} = a_{1,1} \dots a_{n,n}$.

• **Cas d'une matrice triangulaire par blocs.** Contentons-nous d'établir le résultat pour $r = 2$, le cas général s'obtenant ensuite aisément par récurrence.

Fixons $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et notons $\mathcal{B}_p$ (resp. $\mathcal{B}_q$) la base canonique de $\mathbb{K}^p$ (resp. $\mathbb{K}^q$). Objectif :

$$\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A) \det(B).$$

L'application $(M_1, \dots, M_p) \mapsto \begin{vmatrix} M & X \\ 0 & B \end{vmatrix}$ de $(\mathbb{K}^p)^p$ dans $\mathbb{K}$, où M est la matrice de colonnes $M_1, \dots, M_p$, est clairement p -linéaire alternée, ainsi $\varphi = \varphi(\mathcal{B}_p) \det_{\mathcal{B}_p}$. A fortiori, en notant $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A ,

$$\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \varphi(C_1, \dots, C_p) = \det_{\mathcal{B}_p}(C_1, \dots, C_p) \varphi(\mathcal{B}_p) = \det(A) \begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & B \end{vmatrix}.$$

De même, l'application $(N_1, \dots, N_q) \mapsto \begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & N \end{vmatrix}$ de $(\mathbb{K}^q)^q$ dans $\mathbb{K}$, où N est la matrice de lignes $N_1, \dots, N_q$, est q -linéaire alternée, ainsi $\psi = \psi(\mathcal{B}_q) \det_{\mathcal{B}_q}$, et en notant $L_1, \dots, L_q$ les lignes de B ,

$$\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A) \begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A) \psi(L_1, \dots, L_q) = \det(A) \det_{\mathcal{B}_q}(L_1, \dots, L_q) \psi(\mathcal{B}_q) = \det(A) \det(B) \begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & I_q \end{vmatrix}$$

et comme la matrice $\begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ est triangulaire, on obtient l'égalité espérée.