27 | Matrices *vs* applications linéaires

Dans l'ensemble de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ † et les lettres m, n, p, q et r désignent des entiers naturels non nuls.

1 Représentation matricielle d'une application linéaire

1.1 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Définition 1 – Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{X} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille finie de vecteurs de E. Pour tout $j \in [\![1\,,p]\!]$, on note $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$ les coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{B}$.
La matrice $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})$ ou $[\mathscr{X}]^{\mathscr{B}}$, est appelée *matrice de la famille de vecteurs $\mathscr{X}$ dans la base $\mathscr{B}$.*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & & x_j & & x_p \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow e_1 \\ \\ \leftarrow e_i \\ \\ \leftarrow e_n \end{array}$$

Coordonnées du vecteur x_j dans la base $\mathscr{B}$ écrites en colonnes

On connait tout d'un vecteur lorsque l'on dispose de ses coordonnées dans une base, ainsi, plus généralement, on connait tout d'une famille de vecteurs quand on connait sa matrice dans une base. Ramener un vecteur à ses coordonnées ou une famille de vecteurs à sa matrice dans une base, revient à n'en conserver que le squelette numérique. Ainsi, que l'on soit en présence de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, de polynômes, de fonctions, de suites, de matrices, ...toute information géométrique, *i.e.* vectorielle, peut être « numérisée » matriciellement.

Exemple 2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors, pour tout $x \in E$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ est tout simplement la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.

Exemple 3 Notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$, $\quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}((1,0,3),(2,-1,0)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

✖ **Attention !** ✖ Il est impératif d'être vigilant à l'ordre des vecteurs de la base et de la famille représentée :

$$\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(3X^2+2X+1, X, X^2-X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{(X^2,X,1)}(3X^2+2X+1, X^2-X, X) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 4 – Matrice d'une application linéaire dans des bases

• Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n non nulles, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
On appelle *matrice de u dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$* et on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ ou $[u]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}}$ la matrice de la famille $(u(e_j))_{1 \leqslant j \leqslant p}$ dans la base $\mathscr{C}$.

• Matrice d'un endomorphisme dans UNE base

Si $E = F$ et si $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$ est simplement notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u(e_1) & & u(e_j) & & u(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow f_1 \\ \\ \leftarrow f_i \\ \\ \leftarrow f_n \end{array}$$

Coordonnées du vecteur $u(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$ écrites en colonnes

†. Tous les résultats énoncés dans ce chapitre demeurent vrais sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque.

On connaît tout d'une application linéaire lorsque l'on connaît les valeurs qu'elle prend sur une base de l'espace de départ (théorème 40 de rigidité du chapitre 22), ainsi on connaît tout d'une application linéaire lorsque l'on connaît sa matrice dans des bases respectives des espaces de départ et d'arrivée. Un exercice peut ainsi commencer sans la moindre ambiguïté de la manière suivante :

« On note u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. »

Il convient alors de comprendre que l'endomorphisme en question est $(x, y, z) \overset{u}{\longmapsto} (x + 2z, 3x + y + 4z, 4y + 5z)$, pour lequel en effet $u((1, 0, 0)) = (1, 3, 0)$, $u((0, 1, 0)) = (0, 1, 4)$ et $u((0, 0, 1)) = (2, 4, 5)$.

✎ **En pratique** ✎ La matrice d'une application linéaire u permet

- par ses colonnes d'exprimer vectoriellement l'application linéaire : la j^{e} colonne est formée des composantes dans la base d'arrivée de l'image du j^{e} vecteur de la base de départ ;
- par ses lignes d'exprimer analytiquement l'application linéaire : la i^{e} ligne donne l'expression de la i^{e} composante de $u(x)$ en fonction des composantes de x.

Exemple 5 Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$.

Exemple 6 Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par la famille libre $\mathscr{B} = (\sin, \cos, \exp)$ et $\Delta : f \longmapsto f'$ l'endomorphisme de dérivation de E. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En effet, d'une part $\mathscr{B}$ est une base de E par construction, d'autre part $\Delta(\sin) = \cos$, $\Delta(\cos) = -\sin$ et $\Delta(\exp) = \exp$.

Exemple 7 Soit $a, b \in \mathbb{R}$. La matrice de la similitude directe $u : z \longmapsto (a + ib)z$ dans la base $(1, i)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est $\mathrm{Mat}_{(1,i)}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

En effet, $u(1) = a + bi$ et $u(i) = -b + ai$.

Exemple 8 – Formes linéaires et matrices lignes Lorsque f est une forme linéaire sur E, on utilise habituellement la famille (1) comme base $\mathscr{C}$ de l'espace d'arrivée $\mathbb{K}$. En notant $\mathscr{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ une base de E, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est alors une matrice ligne $\begin{pmatrix} f(e_1) & \cdots & f(e_p) \end{pmatrix}$ et, pour tout $x \in E$ de coordonnées $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ dans la base $\mathscr{B}$, on a

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} f(e_j) x_j.$$

Ainsi, on identifie une matrice ligne $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ avec la forme linéaire sur $\mathbb{K}^p$ définie par $(x_1, \ldots, x_p) \longmapsto \sum_{j=1}^{p} a_j x_j$.

Les deux exemples suivants montrent l'intérêt de ne pas représenter uniquement les applications linéaires dans les bases canoniques des $\mathbb{K}^n$.

Exemple 9 Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite D d'équation $2x + y = 0$ et parallèlement à la droite D' d'équation $y = x$. D'une part, la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. D'autre part, la matrice de s dans la base $((1, -2), (1, 1))$, adaptée à la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^2 = D \oplus D'$, est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exemple 10 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Il existe alors une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2 Lien entre opérations matricielles et opérations vectorielles

Théorème 11 – Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x \in E$. Si l'on pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, alors AX est la colonne des coordonnées du vecteur $u(x)$ dans la base $\mathscr{C}$. En d'autres termes :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \qquad \text{ou} \qquad [u(x)]^{\mathscr{C}} = [u]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}} \times [x]^{\mathscr{B}}.$$

L'ÉVALUATION pour une application linéaire se traduit matriciellement en termes de PRODUIT et la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ permet d'écrire « numériquement » l'application u. Précisément, pour un vecteur x de E, l'expression de la i^{e} coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathscr{C}$ est liée à la i^{e} ligne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, comme l'indique la démonstration qui suit.

Démonstration. Introduisons les vecteurs des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$: $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$. On notera en outre $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $X = (x_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$.

$$u(x) = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} x_j a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j\right) f_i,$$

ainsi les coordonnées de $u(x)$ dans $\mathscr{C}$ sont $\left(\sum_{j=1}^{p} a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j, \dots, \sum_{j=1}^{p} a_{nj}x_j\right)$, *i.e.* les coefficients du produit AX. ∎

Exemple 12 On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.
On a alors $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\big(1, 2X^2 + X\big)$ et $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\big(X^2 - 2X\big)$.

Théorème 13 – Dictionnaire entre les points de vue vectoriel et matriciel

(i) Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles respectives p et n, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F. L'application $u \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(ii) Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle de bases respectives $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \qquad \text{ou} \qquad [v \circ u]^{\mathscr{D}}_{\mathscr{B}} = [v]^{\mathscr{D}}_{\mathscr{C}} \times [u]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}}.$$

(iii) Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de MÊME DIMENSION FINIE NON NULLE, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. L'application linéaire u est un isomorphisme de E sur F si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ est inversible. En outre, le cas échéant,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u))^{-1} \qquad \text{ou} \qquad [u^{-1}]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}} = \left([u]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}}\right)^{-1}.$$

(iv) **Cas particulier des endomorpshimes** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et $\mathscr{B}$ une base de E. L'application $u \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est un

- isomorphisme d'anneaux et d'espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$;
- isomorphisme de groupes de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. ... ∎

L'assertion **(i)** résume deux choses

- une propriété de linéarité : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda u + \mu v) = \lambda\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) + \mu\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v)$, avec des notations évidentes ;
- une propriété de bijectivité déjà mentionnée informellement précédemment : on connaît entièrement u lorsque l'on connaît $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$. Ainsi un choix de couple de bases induit un isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

L'assertion **(ii)** montre que le PRODUIT est aux matrices ce que la COMPOSITION est aux applications linéaires. Au passage, rappelons que la condition de compatibilité des formats pour le produit de deux matrices impose que le nombre de colonnes de la matrice à gauche doit être égal au nombre de lignes de la matrice à droite et ce nombre commun n'est autre que la dimension de l'espace vectoriel intermédiaire F lors de la composition des applications linéaires associées :

$$\begin{tikzcd} (E,\mathscr{B}) \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "v\circ u"'] & (F,\mathscr{C}) \arrow[r, "v"] & (G,\mathscr{D}) \end{tikzcd}$$

D'après le point **(iv)**, pour un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, la similarité des propriétés des anneaux $\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas fortuite.

Remarque 14 L'isomorphisme $u \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ du point **(i)** du théorème précédent permet de donner une nouvelle démonstration de la formule donnant la dimension de $\mathscr{L}(E,F)$:

$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np = \dim E \times \dim F.$$

Exemple 15 L'endomorphisme s de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\big(X^3+X^2+X, X^2+1\big)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\big(X^3+X+1, X^3+X^2\big)$.

Corollaire 16

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.
Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est la matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathscr{B}$, alors $P(A)$ est la matrice de l'endomorphisme $P(u)$ dans la base $\mathscr{B}$, *i.e.*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P(u)) = P(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)).$$

Exemple 17 Soit $u : (x,y,z) \longmapsto (x+2y-z, 2x-y+8z, x+y+z)$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, alors

$$u^3 - 3u^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} : (x,y,z) \longmapsto (5x+26y-40z, 8x-27y+100z, 4x+8y-3z).$$

En effet, notons A la matrice de u relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors, tous calculs faits,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 14 \\ 8 & 13 & -2 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 16 & 23 & 2 \\ 32 & 1 & 94 \\ 16 & 14 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 - 3A^2 + I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 26 & -40 \\ 8 & -37 & 100 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exemple 18 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, u^n est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $(x,y,z) \longmapsto (x+ny+n^2z, y+2nz, z)$.

Théorème 19 – Caractérisation des bases via l'inversibilité d'une matrice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{X}$ une famille de n vecteurs de E. La famille $\mathscr{X}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})$ est inversible.

Démonstration. Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{X} = (x_1, \dots, x_n)$. La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})$ est, par définition, la matrice de l'unique endomorphisme u de E tel que $u(e_i) = x_i$, pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$. Or, un endomorphisme est bijectif si et seulement s'il transforme une base en une base (théorème 41 du chapitre 22). Le point **(iii)** du théorème 13 permet alors de conclure. ■

Exemple 20 La famille $\mathscr{X} = \big(X^2+3X-1, 2X^2+X, 2X^2\big)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est libre.
En effet, il s'agit même d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$, car, relativement à la base canonique $\mathscr{B} = \big(1, X, X^2\big)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux non nuls et donc inversible.

Interprétation géométrique des blocs d'une matrice. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E de dimension respectives p et q et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_{p+q})$ une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, *i.e.* $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F et $(e_{p+1}, \dots, e_{p+q})$ une base de G.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. La matrice de f dans $\mathscr{B}$ s'écrit $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, pour certaines matrices $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$. Tâchons de comprendre sur deux situations remarquables de quelles manières les blocs A, B, C et D peuvent être interprétés géométriquement.

- **A quelle condition a-t-on C = 0 ?**

$$\begin{aligned} C = 0 \quad &\iff \quad \forall j \in [\![1\,,p]\!], \quad f(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = F \\ &\iff \quad \forall x \in F, \quad f(x) \in F \\ &\iff \quad F \text{ est stable par } f. \end{aligned}$$

  Dans ces conditions, la restriction $f|_F$ induit un endomorphisme de F et $A = \mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_p)}(f|_F)$.

- **A quelle condition a-t-on B = C = 0 ?** Comme précédemment, $B = 0$ si et seulement si G est stable par f. Ainsi $B = C = 0$ si et seulement si F et G sont stables par f. Dans ces conditions, les restrictions $f|_F$ et $f|_G$ induisent des endomorphismes de F et G respectivement et on a

$$A = \mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_p)}(f|_F) \quad \text{et} \quad D = \mathrm{Mat}_{(e_{p+1},\dots,e_{p+q})}(f|_G).$$

Exemple 21 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (avec $2 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$), F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E de dimensions respectives p et q non nulles et $\mathscr{B}$ une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$. Notons π la projection sur F parallèlement à G et σ la symétrie par rapport F parallèlement à G, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\pi) = \begin{pmatrix} I_p & \\ & 0_q \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}.$$

En effet, par définition d'une projection et d'une symétrie, en notant $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_{p+q})$,

$$\forall i \in [\![1\,,p]\!], \quad \pi(e_i) = e_i \ \text{ et } \ \sigma(e_i) = e_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![p+1\,,p+q]\!], \quad \pi(e_i) = 0_E \ \text{ et } \ \sigma(e_i) = -e_i.$$

Exemple 22 Les matrices triangulaires strictes sont nilpotentes.

2 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Dans ce paragraphe, plus que jamais, nous identifions tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ à une matrice colonne, *i.e.* un vecteur de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Identification légitime, dans la mesure où la transposition induit un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition-théorème 23 – Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application $X \longmapsto AX$ de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est linéaire et admet A pour matrice dans les bases canoniques respectives de ces deux espaces vectoriels. On l'appelle l'*application linéaire canoniquement associée à la matrice* A et on la notera $\widehat{A}$ (notation non officielle).

Remarque 24

- L'application $X \longmapsto AX$ est définie de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ et non l'inverse pour une simple raison de compatibilité des formats pour le produit matriciel.
- En notant $\mathscr{B}_p$ et $\mathscr{B}_n$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_n}(\widehat{A}) = A$.
- Pour tout $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $\boxed{\widehat{AB} = \widehat{A} \circ \widehat{B}}$

  En effet, pour tout $X \in \mathbb{K}^r$, $\widehat{AB}(X) = (AB)X = A(BX) = \widehat{A}(BX) = \widehat{A}\Big(\widehat{B}(X)\Big) = \widehat{A} \circ \widehat{B}(X)$.
- Dorénavant, on pourra justifier qu'une application de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est linéaire en l'interprétant comme l'application linéaire canoniquement associée à une matrice (cf. exemple 27).

Exemple 25 L'application linéaire canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ est l'application linéaire de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^2$ définie par $(x, y, z) \longmapsto (y + 2z, 3x + 4y + 5z)$.

Théorème 26 – Traduction de l'inversibilité en termes d'application linéaire canoniquement associée

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son application linéaire canoniquement associée $\widehat{A}$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$. En outre, le cas échéant, $\widehat{A}^{-1} = \widehat{A^{-1}}$.

Démonstration. Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Par définition, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\widehat{A})$ et l'équivalence annoncée est un cas particulier du point **(iii)** du théorème 13. ■

Exemple 27 L'application $f : (x, y) \longmapsto (3x + y, 5x + 2y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et admet pour réciproque $(x, y) \longmapsto (2x - y, -5x + 3y)$.

En effet, f est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, qui est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir simplement un résultat crucial que nous avions énoncé sans démonstration au sujet de l'inversibilité d'une matrice (théorème 60 du chapitre 12).

Théorème 28

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Démonstration. Par hypothèse, $\widehat{A} \circ \widehat{B} = \widehat{AB} = \widehat{I_n} = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$, ainsi $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont des automorphismes de $\mathbb{K}^n$ (caractérisation des automorphismes en dimension finie par l'inversibilité à gauche ou à droite – théorème 48 du chapitre 23), et les matrices A et B sont donc inversibles d'après le théorème précédent. ■

Définition-théorème 29 – Image et noyau d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice, notons $C_1, \ldots, C_p$ ses colonnes. On appelle *image de* A (resp. *noyau de* A) l'image (resp. le noyau) de son application linéaire canoniquement associée $\widehat{A} : X \longmapsto AX$ de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$. Ainsi

$$\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\, A = \{X \in \mathbb{K}^p \mid AX = 0_n\}$$

Démonstration. En notant $(E_1, \ldots, E_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$,

$$\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, \widehat{A} = \mathrm{Vect}\Big(\widehat{A}(E_1), \ldots, \widehat{A}(E_p)\Big) = \mathrm{Vect}(AE_1, \ldots, AE_p) = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots C_p).$$ ■

✎ **En pratique** ✎ L'image d'une matrice A se calcule aisément à partir de ses COLONNES et ses LIGNES décrivent les équations d'un système linéaire homogène dont $\mathrm{Ker}\, A$ est l'ensemble des solutions.

Exemple 30 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}((3, -2, -1))$ et $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}((1, 2, 1), (2, -1, 1))$.

3 Rang d'une matrice/d'un système linéaire

3.1 Rang d'une matrice

Définition-théorème 31 – Rang d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *rang de* A, noté $\mathrm{rg}\, A$, le rang de la famille des colonnes de A.

En particulier, $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, \widehat{A}$ et $\mathrm{rg}\, A \leqslant \min\{n, p\}$.

Démonstration. Notons $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de A. D'une part, $\mathrm{rg}\, A = \dim \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p) \leqslant p$, et

$$\mathrm{rg}\, \widehat{A} = \dim\Big(\mathrm{Im}\, \widehat{A}\Big) = \dim(\mathrm{Im}\, A) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)) = \mathrm{rg}\, A.$$

D'autre part, $\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, ainsi $\mathrm{rg}\, A = \dim \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p) \leqslant \dim \mathbb{K}^n = n$. ■

Théorème 32 – Rang d'une application linéaire/famille de vecteurs *vs* rang d'une matrice

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F.

(i) Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille de vecteurs de E, alors $\operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_p) = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}((x_1, \ldots, x_p)))$.

(ii) Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))$.

Démonstration. ... ■

Corollaire 33 – Caractérisation des matrices inversibles

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible ; **(ii)** $\operatorname{rg} A = n$; **(iii)** $\operatorname{Ker} A = \{0_n\}$; **(iv)** $\operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n$;

(v) La famille des colonnes de A forme une base de $\mathbb{K}^n$, ce qui revient à dire qu'elle est libre OU génératrice ;

(vi) La famille des lignes de A forme une base de $\mathbb{K}^n$, ce qui revient à dire qu'elle est libre OU génératrice.

Démonstration. ... ■

Théorème 34 – La multiplication par une matrice inversible préserve le rang

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Pour tous $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}(PA) = \operatorname{rg}(AQ) = \operatorname{rg} A$.

Démonstration. La matrice P étant inversibles, son application linéaire canoniquement associée $\hat{P}$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$ (point **(iii)** du théorème 13) qui conserve donc le rang par composition (théorème 42 du chapitre 23) :

$$\operatorname{rg}(PA) = \operatorname{rg}\left(\widehat{PA}\right) = \operatorname{rg}\left(\hat{P} \circ \hat{A}\right) = \operatorname{rg} \hat{A} = \operatorname{rg} A.$$

On procède *mutatis mutandis* avec Q. ■

Corollaire 35 – Les opérations élémentaires préservent le rang

Toute opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes d'une matrice en préserve le rang.

Démonstration. Nous avons déjà vu que toute opération élémentaire sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice peut être obtenue par multiplication à gauche (resp. droite) par une certaine matrice inversible (cf. section 4.4 du chapitre 12). ■

✎ **En pratique** ✎ **Algorithme du pivot pour le calcul du rang.** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'algorithme qui suit, fondé sur celui du pivot, ramène le calcul du rang de A au calcul du rang d'une matrice de taille strictement plus petite $(n-1) \times (p-1)$. Le procédé doit être ensuite répété à l'identique jusqu'à l'obtention du résultat.

1. Si $A = 0$, alors $\operatorname{rg} A = 0$ – sortie de l'algorithme.
2. Si $n = 1$ ou $p = 1$ et $A \neq 0$, alors $\operatorname{rg} A = 1$ – sortie de l'algorithme.
3. Sinon, au moins un coefficient de A est non nul, disons a, et va pouvoir nous servir de pivot. On le place en position $(1, 1)$ via une éventuelle permutation de lignes et/ou de colonnes.
4. À l'aide du pivot a, on annule par des opérations élémentaires sur les lignes tous les coefficients de la première colonne situés sous a.

   Étape facultative : toujours à l'aide du pivot a, on annule par des opérations élémentaires sur les colonnes tous les coefficients de la première ligne situés à droite a.
5. À ce stade, la première colonne de la matrice obtenue est clairement NON combinaison linéaire des autres colonnes. Ainsi la sous-matrice A' obtenue par oubli des premières ligne et colonne de A est de rang $\operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} A - 1$.

L'algorithme ainsi décrit se termine avec certitude car A' est strictement plus petite en taille que A.

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} a & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \times & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}}_{\text{Étape 3}} = \operatorname{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} a & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}_{\text{Étape 4}} = \operatorname{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}_{\text{Étape facultative}} \underbrace{=}_{\text{Étape 5}} \operatorname{rg} A' + 1.$$

✖ **Attention !** ✖ Alors qu'il faut choisir de travailler sur les lignes OU EXCLUSIVEMENT sur les colonnes pour inverser une matrice, via l'algorithme du pivot, on peut ici mélanger les opérations sur les lignes et/ou les colonnes pour le calcul du rang.

Exemple 36

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}0&0&1&3\\1&0&-1&2\\0&0&1&2\\-2&4&-4&1\\-1&0&3&0\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\underset{C_1\leftrightarrow C_2}{\begin{pmatrix}0&0&1&3\\0&1&-1&2\\0&0&1&2\\4&-2&-4&1\\0&-1&3&0\end{pmatrix}} = \operatorname{rg}\underset{L_1\leftrightarrow L_4}{\begin{pmatrix}4&-2&-4&1\\0&1&-1&2\\0&0&1&2\\0&0&1&3\\0&-1&3&0\end{pmatrix}} = 1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&2\\0&1&3\\-1&3&0\end{pmatrix} = 1+\operatorname{rg}\underset{L_4\leftarrow L_4+L_1}{\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&2\\0&1&3\\0&2&2\end{pmatrix}}\dots$$

$$\dots = 2+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\\2&2\end{pmatrix} = 2+2=4 \quad \text{(deux colonnes non colinéaires).}$$

✎ **En pratique** ✎ Le rang d'une application linéaire/d'une famille de vecteurs peut être calculé comme le rang d'une matrice grâce à l'algorithme du pivot.

3.2 Rang d'un système linéaire

Définition-théorème 37 – Rang d'un système linéaire

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$.

- **Rang d'un système linéaire.** On appelle *rang du système linéaire* $AX = B$ le rang de la matrice A des coefficients du système.
- **Structure de l'ensemble des solutions.**
  - × L'ensemble des solutions du système linéaire homogène $AX = 0_n$ est égal à $\operatorname{Ker} A$ et est de dimension $p - \operatorname{rg} A$, soit le nombre d'inconnues du système moins son rang.
  - × Le système linéaire $AX = B$ est compatible si et seulement si $B \in \operatorname{Im} A$. Le cas échéant, si $X_0 \in \mathbb{K}^p$ en est une solution particulière, alors l'ensemble des solutions est le sous-espace affine $X_0 + \operatorname{Ker} A$ de $\mathbb{K}^p$.

Démonstration. La structure affine de l'ensemble des solutions d'un système linéaire est déjà connue (cf. corollaire 46 du chapitre 22). En outre, d'après le théorème du rang, $p = \dim \mathbb{K}^p = \dim(\operatorname{Ker} A) + \operatorname{rg} A$. ■

Le résultat précédent conforte notre intuition, dans la mesure où le rang d'une matrice mesure entre autre le degré d'indépendance linéaire de ses lignes (vues comme des vecteurs de $\mathbb{K}^p$) : plus le rang de la matrice A des coefficients du système est grand, plus les contraintes sur les solutions sont fortes (il y a plus d'équations linéairement indépendantes), l'espace des solutions s'en trouve mécaniquement d'autant plus réduit.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer une version renforcée du théorème 68 du chapitre 12 caractérisant les systèmes de Cramer.

Théorème 38 – Caractérisation des matrices inversibles en termes de systèmes linéaires

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible ;

(ii) Pour tout second membre $Y \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $Y = AX$, d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$, possède UNE UNIQUE solution ;

(iii) Pour tout second membre $Y \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $Y = AX$, d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$, possède AU MOINS UNE solution ;

(iv) Le système linéaire homogène $AX = 0_n$, d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$, admet 0_n pour UNIQUE solution.

Démonstration. Par définition de l'application linéaire canoniquement associée à A,

« **(ii)** $\iff$ $\widehat{A}$ bijective », « **(iii)** $\iff$ $\widehat{A}$ surjective » et « **(iv)** $\iff$ $\widehat{A}$ injective ».

Or $\widehat{A} \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ est un endomorphisme en dimension finie, pour lequel les notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité se confondent, d'où l'équivalence entre les points **(ii)**, **(iii)** et **(iv)**. Enfin, on sait déjà que A est inversible si et seulement si $\widehat{A}$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$ (théorème 26), soit l'équivalence entre **(i)** et **(ii)**. ■

4 Changements de bases, équivalence et similitude

4.1 Changement de bases

Définition-théorème 39 – Matrice de passage d'une base à une autre

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E.

- **Définition.** On appelle *matrice de passage de* $\mathscr{B}$ *à* $\mathscr{B}'$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$, notée $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.
- **Propriétés.** **(i)** $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est inversible d'inverse $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$. **(ii)** $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}$.

Démonstration.

(i) $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est la matrice d'un automorphisme : $\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} = \left([\mathrm{Id}_E]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} = [\mathrm{Id}_E^{-1}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = [\mathrm{Id}_E]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

(ii) $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''} = [\mathrm{Id}_E]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \times [\mathrm{Id}_E]_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}'} = [\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E]_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}} = [\mathrm{Id}_E]_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}$. ∎

Remarque 40 Toute matrice inversible peut être considérée comme une matrice de changement de base.
En effet, si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et si $C_1, \ldots, C_n$ désignent les colonnes de P, alors $(C_1, \ldots, C_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ (théorème 19) et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à la base $(C_1, \ldots, C_n)$.

Théorème 41 – Changement de bases pour un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Pour tout vecteur $x \in E$ de coordonnées X dans $\mathscr{B}$ et X' dans $\mathscr{B}'$: $X = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} X'$.

Démonstration. En termes matriciels, l'égalité $x = \mathrm{Id}_E(x)$ s'écrit dans les bases adaptées :
$$X = [x]^{\mathscr{B}} = [\mathrm{Id}_E(x)]^{\mathscr{B}} = [\mathrm{Id}_E]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} [x]^{\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} X'.$$ ∎

$$E, \mathscr{B}' \xrightarrow{\mathrm{Id}_E, P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}} E, \mathscr{B}$$

✎ **En pratique** ✎ La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ permet

- par ses colonnes, d'exprimer vectoriellement le changement de base : par construction, la j^{e} colonne de $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est formée des coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ du j^{e} vecteur de la base $\mathscr{B}'$;
- par ses lignes, d'exprimer analytiquement le changement de base : la i^{e} ligne de $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ donne l'expression de la i^{e} coordonnée dans la base $\mathscr{B}$ d'un vecteur en fonction de ses coordonnées dans $\mathscr{B}'$.

Ainsi, bien qu'une matrice de changement de bases donne l'expression des vecteurs de la nouvelle base ($\mathscr{B}'$) en fonction des vecteurs de l'ancienne ($\mathscr{B}$), elle permet d'exprimer les anciennes coordonnées d'un vecteur quelconque (*i.e.* dans la base $\mathscr{B}$) en fonction des nouvelles (*i.e.* dans la base $\mathscr{B}'$).

Exemple 42 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Notons $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et posons $\begin{cases} \vec{u}_\theta = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j} \\ \vec{v}_\theta = -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}. \end{cases}$
La famille $\mathscr{B}_\theta = (\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ définit une nouvelle base de $\mathbb{R}^2$. En outre, pour tout $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, les coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathscr{B}$ sont évidemment $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et si nous notons $X_\theta = \begin{pmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}_\theta$, on a alors :

$$\begin{cases} x = x_\theta \cos\theta - y_\theta \sin\theta \\ y = x_\theta \sin\theta + y_\theta \cos\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_\theta = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y_\theta = -x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

En effet, $\mathscr{B}_\theta = (\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, car la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est inversible (son déterminant vaut $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$). Par ailleurs, $X = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_\theta} X_\theta$ avec $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_\theta} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}_\theta)$.
Pour l'autre formule, il suffit simplement de calculer l'inverse de $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_\theta}$: $P_{\mathscr{B}_\theta}^{\mathscr{B}} = \left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_\theta}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Théorème 43 – Changement de bases pour une application linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. En posant $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$ on a

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Il est important de se donner des mots pour décrire chacune des données de cet énoncé. Tout simplement, E est l'espace de départ de u, F son espace d'arrivée, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont les « anciennes » bases, *i.e.* les bases avant changement de bases, et $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}'$ les « nouvelles » bases, *i.e.* les bases après changement.

$$\begin{tikzcd} E,\mathscr{B}' \arrow[r, "\mathrm{Id}_E, P"] \arrow[d, "u, A'"'] & E,\mathscr{B} \arrow[d, "u, A"] \\ F,\mathscr{C}' \arrow[r, "\mathrm{Id}_F, Q"'] & F,\mathscr{C} \end{tikzcd}$$

Démonstration. Le diagramme ci-contre tient quasiment lieu de preuve.
L'égalité $u \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_F \circ u$ s'écrit matriciellement $AP = QA'$, en effet

$$AP = [u]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} [\mathrm{Id}_E]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = [u \circ \mathrm{Id}_E]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{C}} = [\mathrm{Id}_F \circ u]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{C}} = [\mathrm{Id}_F]_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}} [u]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{C}'} = QA'.$$ ∎

✖ **Attention !** ✖ Il y a DEUX formules de changement de bases, une pour les vecteurs et une pour les applications linéaires. Il est préférable de ne pas les confondre !

Théorème 44 – Changement de bases et matrice J_r

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, ainsi que $r \in [\![0, \min\{n,p\}]\!]$.
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang r, alors il existe des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de E et F respectivement telles que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = J_r$, où J_r est la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration. ... ∎

4.2 Matrices équivalentes

4.2.1 Définition et propriétés

Définition 45 – Matrices équivalentes

Soit $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La matrice B est dite *équivalente à* A lorsqu'il existe deux matrices $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ inversibles telles que $B = Q^{-1}AP$.

Exemple 46 – Exemple fondamental 1 Si la matrice B est obtenue à partir de la matrice A suite à une série d'opérations élémentaires (sur ses lignes et/ou ses colonnes), alors B est équivalente à A.

En effet, il suffit de se souvenir que les opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice s'interprètent comme des multiplications par des matrices inversibles à gauche (resp. à droite) (cf. section 4.4 du chapitre 12).

Exemple 47 – Exemple fondamental 2

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$ est équivalente à la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.

En effet, conséquence directe de la formule de changement de bases pour les applications linéaires (théorème 43).

Théorème 48 – Propriétés de la relation d'équivalence

(i) Relation d'équivalence. La relation « être équivalente à » pour les matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(ii) Interprétation géométrique. Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même application linéaire entre deux espaces vectoriels dans deux couples de bases différentes.

(iii) Classification des matrices équivalentes par le rang.

- Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.
- Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Démonstration. ... ∎

✎ **En pratique** ✎ Le rang fournit un critère numérique simple pour décider si deux matrices de même format sont équivalentes.

Remarque 49 Le rang est un *invariant total* pour la relation d'équivalence $\sim$ « être équivalente à » sur l'espace des matrices $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dans la mesure où il caractérise l'appartenance de deux matrices à une même classe d'équivalence. Il établit notamment une bijection entre l'ensemble quotient $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})/\sim$ et l'intervalle d'entiers $[\![0\,,\min\{n,p\}]\!]$. Notons enfin que chaque classe d'équivalence de matrices équivalentes de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ contient un représentant privilégié : la matrice J_r.

4.2.2 Applications aux calculs de rang

Théorème 50 – Invariance du rang par transposition

Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\quad \mathrm{rg}\big(A^\top\big) = \mathrm{rg}\, A$.

Démonstration. Posons $r = \mathrm{rg}\, A$. La matrice A est équivalente à J_r (théorème 48), ainsi la matrice $A^\top$ est équivalente à $J_r^\top$ (notons que J_r et $J_r^\top$ n'ont pas le même format en général !). On a alors simplement $\mathrm{rg}\big(A^\top\big) = \mathrm{rg}\big(J_r^\top\big) = r = \mathrm{rg}\, J_r = \mathrm{rg}\, A$. ∎

✎ **En pratique** ✎ En résumé, le rang d'une matrice est égal au rang

- de la famille de ses vecteurs colonnes ;
- de la famille de ses vecteurs lignes (par transposition) ;
- de n'importe quelle application linéaire qu'elle peut représenter (théorème 32).

Définition-théorème 51 – Matrices extraites

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(i) Définition. On appelle *matrice extraite de* A toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_{p'}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_{n'},j_1} & \cdots & a_{i_{n'},j_{p'}} \end{pmatrix}$, où $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{n'} \leqslant n$ et $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{p'} \leqslant p$.

(ii) Rang d'une matrice extraite. Pour toute matrice B extraite de A, $\quad \mathrm{rg}\, B \leqslant \mathrm{rg}\, A$.

(iii) Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.
Le rang de A est égal à la taille maximale des matrices inversibles que l'on peut extraire de A.

Démonstration. **(ii)** La matrice B est obtenue à partir de A par supression d'un certain nombre de lignes et de colonnes. Notons B' la matrice intermédiaire obtenue quand on supprime seulement les colonnes. Ainsi, on passe de A à B' par une suppression de colonnes, puis de B' à B par une suppression de lignes. Le rang d'une matrice étant par définition le rang de la famille de ses colonnes :

$$\mathrm{rg}(A) \geqslant \mathrm{rg}(B') = \mathrm{rg}\Big({B'}^\top\Big) \geqslant \mathrm{rg}\Big(B^\top\Big) = \mathrm{rg}(B).$$

(iii) Il suffit d'établir, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, l'équivalence suivante

$$\mathrm{rg}(A) \geqslant r \quad \iff \quad \text{On peut extraire de } A \text{ une matrice inversible de taille } r.$$

- Si on peut extraire de A une matrice inversible de taille r, alors d'après **(ii)** : $\mathrm{rg}(A) \geqslant r$.
- Réciproquement, supposons $\mathrm{rg}(A) \geqslant r$. On peut donc extraire de la famille des colonnes de A une famille libre de r vecteurs. Matriciellement, nous pouvons donc extraire de A une matrice $B \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ de rang r par suppression de certaines colonnes. En raisonnant de même, nous pouvons extraire de $B^\top$ une matrice $C \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K})$ de rang r par suppression de certaines colonnes, *i.e.* par suppression de certaines lignes de B. La matrice $C^\top$ est finalement une matrice extraite de A inversible de taille r.

∎

Exemple 52 La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$ est extraite de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.
On a retenu les lignes 1 et 2 ($(i_1, i_2) = (1, 2)$) et les colonnes 2 et 4 ($(j_1, j_2) = (2, 4)$).

Exemple 53 $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \geqslant 3$, dans la mesure où la matrice extraite $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible (triangulaire à ...).

4.3 Matrices semblables et trace d'un endomorphisme

Définition 54 – Matrices semblables

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice B est dite *semblable à A (sur $\mathbb{K}$)* lorsqu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

Exemple 55 – Exemple fondamental : effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme .
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $f \in \mathscr{L}(E)$. Les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ sont semblables.
En effet, si l'on pose $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, alors $\quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P, \quad$ d'après la formule de changement de bases.

✖ **Attention !** ✖ On veillera à ne pas confondre les notions de matrices équivalentes et de matrices semblables. La seconde ne concerne que les matrices CARRÉES et, dans le cadre de son exemple fondamental, on considère des ENDOMORPHISMES avec les MÊMES BASES AU DÉPART ET À L'ARRIVÉE.

Remarque 56

- Si deux matrices sont semblables, alors elles sont équivalentes, mais la réciproque est fausse (cf. exemple 58).
- *Calcul des puissances d'une matrice.* Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$ (*i.e.* A est semblable à une matrice diagonale), alors $A^k = PD^kP^{-1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui facilite le calcul des puissances de A par l'intermédiaire de celles de D.

Théorème 57 – Propriétés de la relation de similitude

(i) Relation d'équivalence. La relation de similitude sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence.
(ii) Interprétation géométrique. Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme d'un espace vectoriel dans deux bases différentes.
(iii) Invariance du rang et de la trace par similitude.
Deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ont même trace et même rang.

Démonstration. ... ■

✖ **Attention !** ✖ Deux matrices ayant même rang et/ou même trace ne sont pas nécessairement semblables !

Exemple 58 Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables (elles n'ont pas la même trace), mais elles sont équivalentes ($L_2 \leftrightarrow L_3$).

Exemple 59 Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exemple 60 Toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure et réciproquement, via la matrice de passage $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$.

Définition-théorème 61 – Trace d'un endomorphisme en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

- **Définition.** Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, la trace de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ ne dépend pas du choix de la base $\mathscr{B}$ de E. Cette valeur commune est appelée la *trace de u* et notée $\mathrm{tr}(u)$.
- **Propriétés.** **(i) Linéarité.** Pour tous $u, v \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\quad \mathrm{tr}(\lambda u + \mu v) = \lambda\,\mathrm{tr}(u) + \mu\,\mathrm{tr}(v)$.
  (ii) Effet sur une composée. Pour tous $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $\quad \mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$.

Démonstration. • *Définition.* Pour toutes bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E, les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$ sont semblables et ont donc même trace (théorème 57.(iii)).
• *Propriétés.* Conséquence directe de la définition et des propriétés de la trace d'une matrice (théorème 56 du chapitre 12). ■

Exemple 62 – À connaître En dimension finie, la trace d'un projecteur est égale à son rang.

Compétences à acquérir

- Utiliser la représentation matricielle d'une famille de vecteurs pour en obtenir des propriétés : exercices 1 à 3.
- Représenter matriciellement une application linéaire : exercices 4 à 12 et 14.
- Utiliser la représentation matricielle d'une application linéaire pour en obtenir des propriétés : exercices 6, 8 à 12 et 14.
- Obtenir des propriétés d'une matrice en la reliant à une application linéaire : exercices 15 à 17.
- Calculer le rang d'une matrice : exercices 20 à 25.
- Caractériser par le rang l'inversibilité/la nature d'une famille de vecteurs : exercices 26 et 31.
- Utiliser les matrices de passages et les formules de changements de bases : exercices 33, 34 et 51.
- Montrer que des matrices sont semblables : exercices 35 et 37.
- Établir l'existence d'un représentant particulier dans la classe de similitude d'une matrice : exercices 5, 18 et 38 à 42.
- Exploiter l'existence d'un représentant privilégié dans la classe d'équivalence des matrices équivalentes : exercices 47 et 49.

Quelques résultats classiques :

- Matrices dans des bases adaptées des projecteurs et des symétries (exemple 21).
- Les matrices triangulaires strictes sont nilpotentes (exemple 22).
- La trace d'un projecteur est égal à son rang (exemple 62).
- $\operatorname{rg}\bigl(M^\top M\bigr) = \operatorname{rg} M$, pour tout $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (exercice 28).
- Matrices semblables à J_r (exercice 36).
- Trace de l'endomorphisme $M \longmapsto M^\top$ (exercice 43).
- Tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible (exercice 45).
- Majoration de la dimension d'un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les éléments sont de rang inférieur à r (exercice 47).