26 Séries numériques

Nous présentons dans ce chapitre les premiers outils pour sommer une infinité de nombres, avant une extension aux familles sommables au chapitre 34.

1 Généralités

1.1 Série, somme, premiers exemples

Définition 1 – Série, sommes partielles, convergence, divergence, nature

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

- On appelle *série de terme général* u_n, notée $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$, où le terme S_n est appelé *somme partielle d'ordre* n de la série $\sum u_n$.
- La série $\sum u_n$ est dite *convergente* (resp. *divergente*) lorsque la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge (resp. diverge).
- Déterminer la *nature* d'une série consiste à établir si elle est convergente ou divergente.

Une série n'est jamais qu'une suite, ce qui interroge quant à la nécessité de se doter d'une théorie des séries. La théorie des suites n'est-elle pas suffisante ? La réponse est non.

- Grande question de la théorie des suites : à quelle condition la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle convergente ?
- Grande question de la théorie des séries : à quelle condition sur la SUITE $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la SÉRIE $\sum u_n$, obtenue en sommant les termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, est-elle convergente ?

Cette question spécifique appelle des résultats spécifiques qui sont l'objet de ce chapitre.

Définition 2 – Somme et restes d'une série convergente

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que la série $\sum u_n$ soit CONVERGENTE.

- La limite finie $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$ est notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et appelée la *somme de la série* $\sum u_n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle *reste d'ordre* n *de la série convergente* $\sum u_n$ la différence de la somme de la série avec sa somme partielle d'ordre n :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

✖ ATTENTION ! ✖ La somme d'une série N'est PAS une somme, c'est une LIMITE !
La suite des restes d'une série est seulement définie pour les séries CONVERGENTES.

Théorème 3 – Limite du reste

Si $(R_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite des restes d'une série convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Démonstration. Immédiat par opération sur les limites : $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 0.$ ∎

Remarque 4 Comme dans le cas des suites, les premiers termes d'une série n'ont pas d'influence sur sa nature. Ils affectent en revanche la valeur de sa somme lorsqu'elle est convergente. Précisément, pour une série convergente $\sum u_n$, on a, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k.$$

Exemple 5 La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge.

Exemple 6 – Série harmonique La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$, dite *série harmonique*, diverge – ET POURTANT $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

Définition-théorème 7 – Série géométrique

Soit $z\in\mathbb{C}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} z^n$, dite *série géométrique (de raison z)*, converge si et seulement si $|z|<1$. En outre, le cas échéant, pour tout $p\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z}.$$

Démonstration. ... ■

Définition-théorème 8 – Série exponentielle

Pour tout $z\in\mathbb{C}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$ converge avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\mathrm{e}^z$.

Démonstration. Application de l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $t\longmapsto \mathrm{e}^{tz}$ entre 0 et 1 (exemple 61 du chapitre 25). ■

Théorème 9 – Caractérisation de la convergence par les parties réelle et imaginaire

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent. En outre, le cas échéant,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Re}(u_n) + i\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Im}(u_n).$$

Démonstration. Ces résultats sont vrais pour les suites et les séries sont justement des suites. ■

1.2 Divergence grossière

Théorème 10 – Condition nécessaire de convergence d'une série

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite. Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

Démonstration. Si $\sum u_n$ converge, alors $\displaystyle u_n=\sum_{k=0}^{n}u_k-\sum_{k=0}^{n-1}u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\sum_{k=0}^{+\infty}u_k-\sum_{k=0}^{+\infty}u_k=0$, par opérations sur les limites. ■

La contraposée du théorème précédent mène à la définition suivante.

Définition-théorème 11 – Divergence grossière

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite. On dit que la série $\sum u_n$ *diverge grossièrement* lorsque $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0. Le cas échéant, la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple 12 La série géométrique $\sum z^n$ diverge grossièrement lorsque $|z|\geqslant 1$.

✖ **ATTENTION !** ✖ La réciproque de l'implication « $\sum u_n$ converge $\Longrightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ » est FAUSSE en général. Affirmer le contraire revient à confesser que l'on n'a ABSOLUMENT RIEN COMPRIS à la théorie des séries. S'il suffisait de montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ pour établir la convergence de la série $\sum u_n$, ce chapitre serait parfaitement inutile. En résumé :

Une somme infinie de quantités qui tendent vers 0 peut ne pas converger.

Exemple 13 Comme on l'a vu à l'exemple 6, la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge – ET POURTANT $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

1.3 Opérations sur les séries

Théorème 14 – Opérations sur les séries

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}, (v_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ deux suites

(i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ ont même nature. En outre, si ces séries convergent, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

(ii) Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série $\sum(u_n + v_n)$ converge aussi et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

(iii) Si la série $\sum u_n$ converge tandis que la série $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Démonstration. Ces résultats sont vrais pour les suites et les séries sont justement des suites. ■

Remarque 15 En particulier, l'ensemble $\mathscr{S}$ des séries convergentes est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites numériques et l'application $\sum u_n \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une forme linéaire sur $\mathscr{S}$.

✖ **ATTENTION !** ✖

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de natures différentes, la série $\sum(u_n + v_n)$ est divergente ; mais la série $\sum(u_n + v_n)$ peut converger alors que chacune des séries considérées diverge (penser à $v_n = -u_n$). Ainsi, une série ne doit pas être « découpée » n'importe comment, au risque de faire apparaître des « morceaux » divergeant qui n'auraient donc aucun sens.
- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, on ne peut rien dire en général de la série $\sum u_n v_n$.

2 Critères de convergence

2.1 Règles de comparaison pour les séries à termes positifs

Cette section se concentre sur l'étude cruciale des séries dont le terme général est positif. Les résultats valables pour ces séries le restent évidemment pour des séries dont le terme général est négatif ; l'essentiel est donc, dans ce paragraphe, que le terme général soit de SIGNE CONSTANT, du moins, À PARTIR D'UN CERTAIN RANG.

✖ **ATTENTION !** ✖ Pour utiliser les théorèmes de cette section en exercice, il est impératif de vérifier la positivité des suites étudiées.

Théorème 16 – Adaptation aux séries du théorème de la limite monotone

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite POSITIVE (à partir d'un certain rang). La série $\sum u_n$ converge si et seulement si elle est majorée, *i.e.* la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration. La suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geqslant 0$. Elle converge donc en effet si et seulement si elle est majorée, d'après le théorème de la limite monotone. ■

Remarque 17

- Une série à termes POSITIFS divergente diverge nécessairement vers $+\infty$.
- Les sommes partielles d'une série à termes POSITIFS convergente sont majorées par sa somme : $\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Théorème 18 – Comparaison par des inégalités

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}, (v_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, à partir d'un certain rang.

(i) Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge aussi.

(ii) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge aussi.

Démonstration. … ■

Exemple 19 La série $\sum \dfrac{1}{n^2(2+\sin n)}$ converge.

Exemple 20 La série $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{\cos n}}{n}$ diverge.

Théorème 21 – Comparaison par équivalent

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}, (v_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites POSITIVES (à partir d'un certain rang). Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration. La relation d'équivalence sur les suites étant symétrique, il nous suffit de montrer que si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge aussi. Or, par hypothèse, il existe une suite $(\eta_n)_{n\geqslant 0}$ et un rang $N \in \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n = \eta_n v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \eta_n = 1.$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, $0 \leqslant u_n \leqslant 2v_n$. On en déduit, par comparaison, la convergence de la série $\sum u_n$, si la série $\sum v_n$ converge. ■

Exemple 22 La série $\sum \dfrac{1}{n(n+\sqrt{n})}$ converge.

Les théorèmes précédents montrent que dans certains cas l'étude de la convergence (absolue) d'une série réelle $\sum u_n$ se ramène à celle d'une série $\sum v_n$ à termes positifs. Cela motive l'introduction de séries de référence, de nature connue, susceptible de jouer le rôle de $\sum v_n$. En complément des séries géométriques et exponentielle (théorèmes 7 et 8), les séries de Riemann correspondent à l'échelle de comparaison la plus usuelle au voisinage de $+\infty$, à savoir l'échelle des puissances.

Définition-théorème 23 – Séries de Riemann†

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$, dite *série de Riemann de paramètre* α, converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. … ■

Nous savions déjà que la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge et le théorème précédent nous apprend qu'elle fait office de seuil entre les cas de convergence et de divergence.

2.2 Convergence absolue

La notion suivante de convergence et son lien avec la convergence d'une série légitiment l'étude de la convergence des séries à termes positifs effectuée à la section précédente.

Définition 24 – Convergence absolue

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite. On dit que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente* ou qu'elle *converge absolument* lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Exemple 25 La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument, puisque la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge $(2 > 1)$.

Exemple 26 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série exponentielle $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge absolument.

En effet, pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{z^n}{n!}\right| = \dfrac{|z|^n}{n!}$ et la série exponentielle $\sum \dfrac{|z|^n}{n!}$ converge.

†. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 à Breselenz – 1866 à Selasca) est un mathématicien allemand qui contribua de façon cruciale à divers domaines des mathématiques de la topologie à la géométrie différentielle (surface de Riemann) en passant par l'analyse (fonction d'une variable complexe, intégrale d'une fonction).

Exemple 27 Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, la série géométrique $\sum z^n$ converge absolument.

En effet, pour tous $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$ et $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$ et la série géométrique $\sum |z|^n$ converge.

Une question naturelle se pose suite à cette définition : une série absolument convergente est-elle convergente ? La réponse est oui.

Théorème 28 – La convergence absolue implique la convergence

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite. Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge et sa somme vérifie l'inégalité triangulaire suivante

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Démonstration. ... ∎

Exemple 29 La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{i\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{n})}}{n^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\sin n}}$ converge.

✖ **Attention !** ✖ La réciproque du théorème précédent est FAUSSE ! Une série peut converger sans converger absolument. C'est le cas de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^{-1}$ – dite *semi-convergente*.

- Puisque $0 \leqslant \dfrac{2}{n} \leqslant \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor^{-1}$, pour tout $n \geqslant 2$, et puisque la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, la série à termes positifs $\sum \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor^{-1}$ diverge, par comparaison.
- Pour tout $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (-1)^k \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \ldots = \begin{cases} \frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$ Par conséquent, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor^{-1} = 0$ et ainsi la série $\sum (-1)^n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^{-1}$ converge.

Définition 30 – Semi-convergence

Une série est dite *semi-convergente* lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente.

Exemple 31 La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est semi-convergente pour $\alpha \in]0\,,1]$ (cf. exemple 43).

2.3 Comparaison par domination

Théorème 32 – Comparaison par domination

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ POSITIVE (à partir d'un certain rang). Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

Démonstration. Par définition, il existe une suite $(\theta_n)_{n\geqslant 0}$ bornée et un rang $N \in \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n = \theta_n v_n.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant |\theta_n v_n| \leqslant K v_n$. On peut alors conclure par comparaison. ∎

Remarque 33

- La contraposée du théorème précédent permet d'affirmer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et si $\sum u_n$ diverge, alors la série à termes positifs $\sum v_n$ diverge.
- Dans l'énoncé du théorème précédent, on peut remplacer l'hypothèse « $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ » par « $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ », dans la mesure où la négligeabilité entraîne la domination.

Exemple 34 Pour tout $\alpha > 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin n}{\alpha^n}$ converge.

✎ **En pratique** ✎ **(Règle de Riemann)** Le théorème précédent de comparaison par domination combiné avec l'exemple des séries de Riemann (théorème 23) s'utilise couramment sous l'une des formes suivantes :

(i) S'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée (*e.g.* si elle converge), alors la série $\sum u_n$ converge absolument et donc converge.

(ii) Si la suite $(nu_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel $k > 0$ (*e.g.* si $(nu_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$), alors la série $\sum u_n$ diverge.

En effet, au voisinage de $+\infty$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, dans le cas **(i)**, et $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$, dans le cas **(ii)**.

2.4 Règle de d'Alembert (programme de 2e année)

La règle de d'Alembert généralise la règle de convergence des séries géométriques (théorème 7) à des séries de termes généraux « quasi géométriques », *i.e.* des séries pour lesquelles le quotient $|u_{n+1}/u_n|$ admet une limite.

Théorème 35 – Règle de d'Alembert†

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite qui ne s'annule pas, au moins à partir d'un certain rang.

(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge (absolument).

(ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement).

Démonstration. … ■

✖ **Attention !** ✖ La règle de d'Alembert ne permet pas de conclure dans le cas (dit *douteux*) où la limite vaut 1. Il suffit de penser aux séries de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ dont la nature dépend de la valeur de α tandis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\right| = 1$. Pour les séries relevant de ce cas douteux, un raffinement est donnée par la règle de Raab-Duhamel (cf. exercice 32).

La règle de d'Alembert est tout indiquée lorsque le terme général u_n est défini via des produits et des quotients, qui peuvent laisser espérer des simplifications dans le quotient u_{n+1}/u_n.

Exemple 36 La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^4}{3^n}$ converge.

Exemple 37 La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$ converge, pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Remarque 38 – Fonction exponentielle Nous avons précédemment établi que $\mathrm{e}^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ (exemple 61 du chapitre 25), mais en nous basant sur une définition de l'exponentielle complexe bancale (adossée aux fonctions sinus et cosinus dont la définition géométrique proposée au chapitre 5 reste vague) et donc non satisfaisante. Puisque la règle de d'Alembert nous permet d'obtenir *ex nihilo* la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$, cela nous permettrait de donner une définition alternative de la fonction exponentielle en définissant le nombre e^z comme la somme de cette série. Il s'agirait alors de démontrer les propriétés classiques de la fonction exponentielle à partir de cette définition, ce que nous serons par exemple capable de faire au chapitre 34 pour la relation cruciale $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{z'}$, où $z, z' \in \mathbb{C}$ (cf. exercice 42 aussi).

2.5 Critère spécial des séries alternées

L'étude de la semi-convergence d'une série, en général délicate, s'avère aisée dans le cas particulier des séries dite alternées, pour lesquelles on dispose d'un critère de convergence.

Définition 39 – Série alternée

On appelle *série alternée* toute série de la forme $\sum(-1)^n u_n$ avec $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de signe constant.

†. Jean Le Rond d'Alembert (1717 à Paris – 1783 à Paris) est un mathématicien, physicien, philosophe et encyclopédiste français qui a notamment dirigé avec Denis Diderot l'édition entre 1751 et 1772 de l'*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, première encyclopédie française.

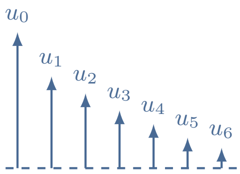
Exemple 40 Les séries $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum \frac{(-1)^n \operatorname{e}^{-n}}{n^2+1}$ sont alternées.

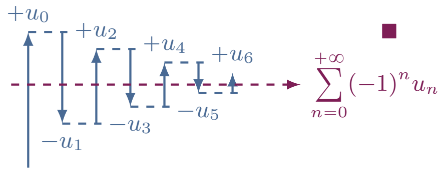
Théorème 41 – Critère spécial des séries alternées

Si $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle, alors la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ converge et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k\right| \leqslant u_n.$$

Démonstration. ... ■





Remarque 42

- L'énoncé précédent se conçoit graphiquement.
- L'inégalité $(-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k \geqslant 0$ exprime que le réel $\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k$ est du signe de $(-1)^n$.

Exemple 43 – Séries de Riemann alternées Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, dite *série de Riemann alternée de paramètre* α, converge si et seulement si $\alpha > 0$.

En effet, pour $\alpha \leqslant 0$, la série diverge grossièrement, et, pour $\alpha > 0$, la série converge en vertu du critère spécial des séries alternées, dans la mesure où la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante de limite nulle.

Il est fréquent de ne pas pouvoir appliquer directement le critère spécial des séries alternées, l'hypothèse de décroissance pouvant être délicate à vérifier voire fausse. Le cas échéant, il convient de « casser » via un développement asymptotique le terme général en morceaux simples dont on pourra discuter la nature.

Exemple 44 La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge.

✖ **Attention !** ✖ L'exemple précédent souligne le rôle crucial de l'hypothèse de « positivité » du théorème de comparaison par des équivalents (théorème 21). En effet, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, or la série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge $(1/2 > 0)$ contrairement à la série de l'exemple précédent.

3 Correspondance suite-série

Théorème 45 – Lien suite-série

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La SUITE $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et la SÉRIE (*télescopique*) $\sum(u_{n+1}-u_n)$ ont même nature.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par simplification télescopique, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = u_n - u_0$. ■

✎ **En pratique** ✎ On peut ainsi étudier une suite en se servant des techniques spécifiques de la théorie des séries, ou inversement étudier une série au moyen des techniques spécifiques de la théorie des suites.

Exemple 46 – Série harmonique (bis) La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Exemple 47 – Développement asymptotique de la série harmonique $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$, avec γ un réel, appelé *constante d'Euler-Mascheroni.*†

En effet, il s'agit de montrer que la suite de terme général $u_n = \ln n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ converge, via le lien suite-série !

Remarque 48 La simplification télescopique des sommes est l'analogue discret du théorème fondamental de l'analyse. La suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$ peut être interprétée comme la dérivée *discrète* de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, à l'instar de la fonction f' qui s'obtient comme limite d'un taux d'accroissement. Or le passage en sens inverse de f' à f se fait en sommant au sens du calcul intégral, comme on le met en œuvre dans le cadre d'une simplification télescopique :

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a) \qquad vs \qquad \sum_{k=m}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = u_n - u_m.$$

Au chapitre 19, nous avons appris à exploiter f' pour l'étude de f (c'est le théorème des accroissements finis). Typiquement, d'après l'inégalité des accroissements finis, la taille de f' conditionne celle de f. Le lien suite-série en est l'analogue dans le cadre discret des suites : si la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$ tend suffisamment vite vers 0, *i.e.* si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge aussi.

4 Comparaison série-intégrale

En interprétant l'intégrale d'une fonction comme l'aire sous une courbe, on peut espérer approcher une somme par certaines intégrales. En l'occurrence, il s'agit de comparer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$ à l'intégrale $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$, lorsque f est une fonction MONOTONE, POSITIVE et continue sur $\mathbb{R}_+$. Précisément, pour une telle fonction DÉCROISSANTE, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

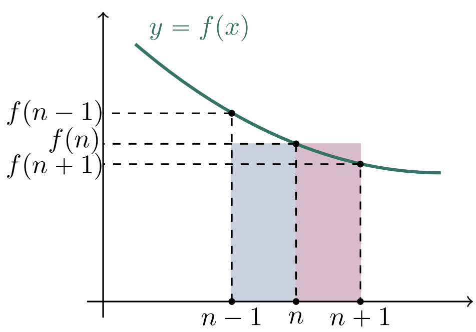
$$\forall t \in [n\,, n+1], \quad f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n),$$

ce qui implique, par croissance de l'intégrale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Encadrement qui se conçoit aisément graphiquement, comme l'indique la figure ci-contre, où les deux rectangles sont d'aire $f(n)$.



En sommant ces inégalités pour $n \in [\![0\,, N]\!]$ (attention au premier terme !), on obtient via la relation de Chasles un encadrement de la suite des sommes partielles de la série :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{N} f(n) \leqslant f(0) + \int_0^N f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

- Si la série $\sum f(n)$ converge, alors, étant à termes positifs,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{N} f(n) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

  Ainsi la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0}$ est croissante (car f est positive) et majorée, elle est donc convergente.

- Si la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0}$ converge, alors, étant croissante,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} f(n) \leqslant f(0) + \int_0^N f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(0) + \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

  où $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty}\int_0^N f(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi la série à termes positifs $\sum f(n)$ est majorée et donc convergente.

Théorème 49 – Comparaison série-intégrale

Si f est une fonction continue, POSITIVE et DÉCROISSANTE sur $\mathbb{R}_+$, alors la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0}$ sont de même nature.

Exemple 50 – Séries de Riemann Le théorème de comparaison série-intégrale permet de donner une nouvelle démonstration du théorème 23 de convergence des séries de Riemann.

✎ **En pratique** ✎ Il est souvent plus aisé de calculer explicitement l'intégrale $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ que les sommes partielles de la série $\sum f(k)$. L'encadrement (1) permet alors d'obtenir des informations assez précises quant au comportement asymptotique de la suite des sommes partielles. On pourra notamment mener une comparaison série-intégrale lorsque l'on demande de donner un équivalent de la suite des sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} f(k)\right)_{n\geqslant 0}$ d'une série divergente ou de la suite des restes $\displaystyle\left(\sum_{k=n}^{+\infty} f(k)\right)_{n\geqslant 0}$ d'une série convergente, avec $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ continue et monotone.

Exemple 51 – Développement asymptotique de la série harmonique (bis)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{=}\ln n+O(1)\qquad\text{et, en particulier,}\qquad\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n.$$

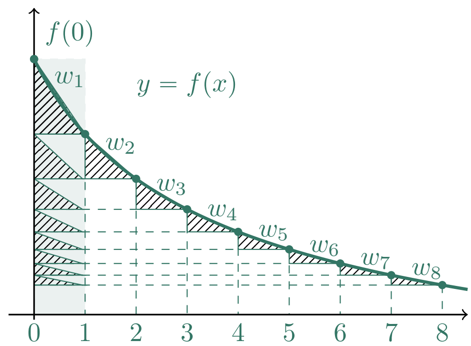
Exemple 52 – Équivalents des restes des séries de Riemann Pour tout $\alpha>1$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Raffinement On considère toujours une fonction f continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $n\geqslant 1$,

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{n} f(k)=-f(0)+\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t-f(k)\right)=-f(0)+\sum_{k=1}^{n} w_k,$$

en posant, pour tout $k\geqslant 1$,

$$w_k=\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t-f(k).$$



Or, par décroissance de f et croissance de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
&\forall k\geqslant 1,\quad f(k)\leqslant\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant f(k-1)\\
\Longrightarrow\quad&\forall k\geqslant 1,\quad 0\leqslant w_k\leqslant f(k-1)-f(k)\\
\Longrightarrow\quad&\sum_{k=1}^{n} w_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}[f(k-1)-f(k)]=f(0)-f(n)\leqslant f(0)
\end{aligned}$$

Ainsi, la série à termes positifs $\sum w_k$ est majorée et donc convergente. Par conséquent,

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{n} f(k)\underset{n\to+\infty}{=}-f(0)+\sum_{k=0}^{+\infty} w_k+o(1).$$

Théorème 53 – Comparaison série-intégrale (bis, HP)

Si f est une fonction continue, POSITIVE et DÉCROISSANTE sur $\mathbb{R}_+$, alors il existe un réel ℓ tel que

$$\sum_{k=0}^{n} f(k)\underset{n\to+\infty}{=}\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t+\ell+o(1).$$

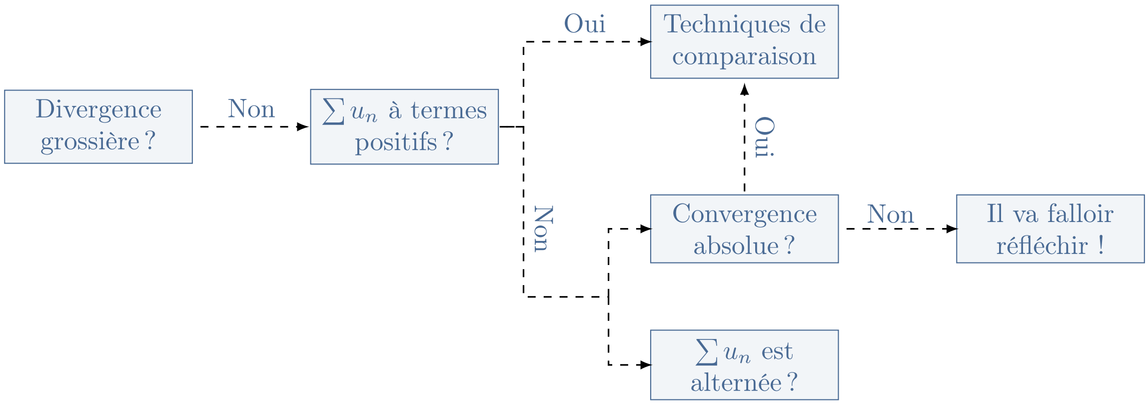
Exemple 54 – Développement asymptotique de la série harmonique (ter) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{=}\ln n+\gamma+o(1)$, avec γ un réel, appelé *constante d'Euler-Mascheroni*.†

En effet, la fonction inverse est continue, positive et décroissante sur $[1\,,+\infty[$.

†. La constante d'Euler-Mascheroni vaut approximativement $0,577\,21\underline{6}$ et on ne sait toujours pas en 2025 si ce réel est rationnel ou non.

5 Plan d'étude d'une série numérique

Le schéma ci-dessous ordonne les résultats de convergence de ce chapitre. Il s'agit de la stratégie à mettre en œuvre pour l'étude de la convergence d'une série.



6 Sommation des relations de comparaison (programme de 2e année MP)

Le théorème suivant de sommation des relations de comparaison sera un outil puissant pour le calcul asymptotique.

Théorème 55 – Sommation des relations de comparaison

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs POSITIVES et $(v_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

(i) Comparaison des restes. Si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$ et si $\sum u_n$ CONVERGE, alors $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$.

(ii) Comparaison des sommes partielles. Si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$ et si $\sum u_n$ DIVERGE, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$.

Les deux énoncés précédents restent valables en remplaçant tous les O par des o, ou par des $\sim$.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$. Il existe alors $K \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant |v_n| \leqslant K u_n$.

- *Cas $\sum u_n$ convergente.* Par comparaison, les série $\sum v_n$ converge (absolument) également et

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} |v_k| \leqslant K \sum_{k=n}^{+\infty} u_k, \qquad \text{soit} \qquad \sum_{k=n}^{+\infty} v_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right).$$

- *Cas $\sum u_n$ divergente.* Pour tout $n > n_0$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |v_k| = \sum_{k=0}^{n_0-1} |v_k| + \sum_{k=n_0}^{n} |v_k| \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} |v_k| + K \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} (|v_k| - K u_k)}_{\text{constante, donc } O(S_n)} + \underbrace{K S_n}_{O(S_n)},$$

où $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, et sachant $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ (série à termes positifs divergente).

- Le cas des petits o est similaire, en remplaçant K par $\varepsilon > 0$ arbitraire.
- Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, on conclut en remarquant que $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$. ∎

Exemple 56 – Théorème de Cesàro Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \ell$.

Ce résultat reste valable lorsque $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $\ell = \pm\infty$.

Exemple 57 $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exemple 58 – Développement asymptotique de la série harmonique (quatro)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Compétences à acquérir

- Calculer la somme d'une série : exercices 1 à 5, 10 à 12 et 16.
- Étudier la nature d'une série via une règle de comparaison : exercices 6 à 9, 13, 30 et 31 à 33.
- Utiliser le critère spécial des séries alternées : exercices 14, 15, 25, 26 et 29.
- Étudier la nature d'une série via un développement asymptotique de son terme général : exercices 14 et 15.
- Utiliser la correspondance suite-série : exercices 20 à 24 et 27 à 28.
- Utiliser la comparaison série-intégrale : exercices 36 à 38.

Quelques résultats classiques :

- Divergence de la série harmonique (exemple 6).
- Développement asymptotique (des sommes partielles) de la série harmonique (exemples 47, 51 et 54).
- Convergence des séries de Riemann alternées (exemple 43).
- Équivalents des restes des séries de Riemann (exemple 52).
- Convergence des séries de Bertrand (exercice 8).
- Règle de Raab-Duhamel (exercice 32).