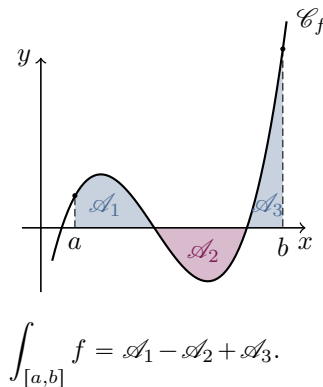


25 | Intégration

L'intégration vise à définir un nombre qui, pour une fonction f suffisamment régulière sur un segment $[a, b]$, mesure l'aire algébrique délimitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$. Ce nombre sera appelé *intégrale de f sur $[a, b]$* .

Dans l'ensemble de ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.



1 Continuité uniforme

Définition 1 – Continuité uniforme

Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes est dite *uniformément continue* sur I lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall (x, y) \in I^2, \quad |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Rappelons que la continuité de f sur I s'écrit

$$\forall x \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall y \in I, \quad |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

La différence entre les deux notions réside ainsi dans l'indépendance de la variable η de l'uniforme continuité vis-à-vis de la variable $x - \eta$ ne dépendant que de ε – tandis que pour la continuité η dépend a priori de x .

Théorème 2

Si une fonction f est uniformément continue sur un intervalle I , alors f est continue sur I .

✗ **ATTENTION !** ✗ La réciproque du corollaire précédent est fausse en toute généralité, comme l'établit l'exemple suivant. On dispose néanmoins d'une réciproque partielle (cf. théorème 6).

Exemple 3 La fonction carrée est uniformément continue sur $[0, 1]$, mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Le théorème suivant est un raffinement du théorème 44 du chapitre 19.

Théorème 4 – Lien entre continuité uniforme et lipschitzianité

Si une fonction f est lipschitzienne sur un intervalle I , alors f est uniformément continue sur I .

Démonstration. Si f est k -lipschitzienne sur I , avec $k > 0$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, le réel $\eta = \varepsilon/k$ convient. ■

✗ **ATTENTION !** ✗ La réciproque est fausse ! Comme le montre le deuxième point de l'exemple ci-après.

Exemple 5

- La fonction sinus est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
En effet, elle est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, d'après l'inégalité des accroissements finis.
- La fonction racine carrée est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, mais n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème 6 – Théorème de Heine

Si I est un SEGMENT de $\mathbb{R}$, alors toute fonction continue sur I est uniformément continue sur I .

Démonstration. Admis conformément au programme. Une preuve est donnée à l'annexe A. ■

2 Fonctions en escalier et fonctions continues par morceaux

Dans l'ensemble de cette section, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

2.1 Subdivision d'un segment

Définition 7 – Subdivision d'un segment, pas

- On appelle *subdivision du segment* $[a, b]$ toute famille FINIE $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ d'éléments de $[a, b]$ telle que $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

- On appelle *pas* de la subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ le réel strictement positif $\delta(\sigma) = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\}$.

Exemple 8 Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *subdivision à pas constant* de $[a, b]$ la subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ définie par

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_i = a + i \frac{b-a}{n}.$$

Son pas est égal à $\frac{b-a}{n}$.

Une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ étant par définition une application (en tant que famille), nous pouvons lui associer son image $X(\sigma)$, qui est un sous-ensemble fini de points de $[a, b]$ contenant a et b . Réciproquement si X est un sous-ensemble fini de points de $[a, b]$ contenant a et b , nous pouvons lui faire correspondre une et une seule subdivision de $[a, b]$ dont il soit l'image. Précisément, si $\text{Card}(X) = n + 1$, il s'agit de la subdivision définie par

$$x_0 = a \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i = \min(X \setminus \{x_0, \dots, x_{i-1}\}).$$

Définition-théorème 9 – Relation d'ordre sur l'ensemble des subdivisions d'un segment

- Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$, d'images respectives $X(\sigma)$ et $X(\sigma')$. La subdivision σ' est dite *plus fine* que la subdivision σ lorsque $X(\sigma)$ est inclus dans $X(\sigma')$, ce que l'on note $\sigma < \sigma'$.
- La relation $<$ est une relation d'ordre (partiel) sur l'ensemble des subdivisions d'un segment.

Démonstration. La relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}([a, b])$. ■

Remarque 10 Pour deux subdivisions σ et σ' , si $\sigma < \sigma'$, alors $\delta(\sigma') \leq \delta(\sigma)$, mais la réciproque est fausse.

Théorème 11

Si σ et σ' sont deux subdivisions du segment $[a, b]$, alors il existe une subdivision du segment $[a, b]$ plus fine que σ et σ' .

Démonstration. La subdivision associée à $X(\sigma) \cup X(\sigma')$ convient. ■

2.2 Fonctions en escalier

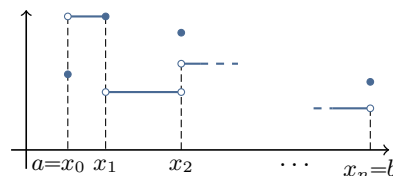
Définition 12 – Fonctions en escalier, subdivision adaptée

Une fonction φ de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ est dite *en escalier sur* $[a, b]$ lorsqu'il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que φ soit constante sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$, avec $1 \leq i \leq n$. Une telle subdivision est appelée une *subdivision adaptée* à la fonction en escalier φ .

On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escaliers définies sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple 13

- Une fonction constante sur le segment $[a, b]$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.
- La fonction partie entière est en escalier sur n'importe quel segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Une subdivision adaptée est en particulier fournie par les abscisses a et b ainsi que tous les entiers compris entre a et b .



Remarque 14

- Une fonction en escalier sur un segment prend un nombre fini de valeurs. En particulier, les fonctions en escaliers sur un segment sont bornées.
- Toute subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée à une fonction φ en escalier est adaptée à φ .
- Si φ et ψ sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$, alors il existe une subdivision adaptée à φ et à ψ .

En effet, soit σ et τ des subdivisions adaptées à φ et ψ respectivement. Il existe alors une subdivision v plus fine que σ et τ (théorème 11) et une telle subdivision est alors adaptée à φ et à ψ .

Théorème 15

L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{[a, b]}$.

Démonstration. D'une part, la fonction nulle est en escalier. D'autre part, pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, en notant $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision adaptée à φ et à ψ (cf. remarque précédente), les fonctions φ et ψ sont constantes sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leq i \leq n$, et il en va donc de même de $\lambda\varphi + \mu\psi$, par opérations. ■

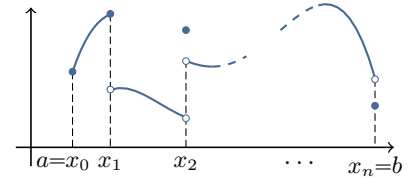
Remarque 16 Les fonctions indicatrices engendrent l'espace des fonctions en escaliers sur $[a, b]$:

$$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) = \text{Vect}(\{1_{[c, d]} \mid a \leq c \leq d \leq b\}).$$

2.3 Fonctions continues par morceaux

Définition 17 – Fonction continue par morceaux sur un segment, subdivision adaptée

Une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite *continue par morceaux* lorsqu'il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que $f|_{]x_{i-1}, x_i[}$ est continue sur $]x_{i-1}, x_i[$ et **PROLONGEABLE PAR CONTINUITÉ EN x_{i-1} ET x_i** , i.e. admet des limites finies en x_{i-1}^+ et x_i^- , pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Une telle subdivision est dite *adaptée à la fonction f* .



L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$.

✗ ATTENTION ! ✗ La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$, même prolongée en 0, n'est PAS continue par morceaux sur $[0, 1]$. En effet la fonction inverse n'a pas de limite finie à droite en 0, ce qui exclut un éventuel prolongement par continuité en 0 de sa restriction à $]0, 1[$.

Exemple 18

- Les fonctions en escaliers sont continues par morceaux : $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$.
- Toute fonction continue sur un segment est continue par morceaux sur ce segment : $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$.

Remarque 19 À l'instar des fonctions en escalier (cf. remarque 14) :

- Toute subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée à une fonction f continue par morceaux est adaptée à f .
- Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, alors il existe une subdivision adaptée à f et g .

Théorème 20 – Propriétés des fonctions continues par morceaux

- (i) L'ensemble $\mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathbb{K}^{[a, b]}$.
- (ii) Une fonction $f \in \mathbb{C}^{[a, b]}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ le sont.
- (iii) Toute fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ est bornée.

✗ ATTENTION ! ✗ Bornée... mais n'atteint pas nécessairement ses bornes !

Démonstration.

- (i) La fonction nulle et la fonction constante égale à 1 sont continues et donc continues par morceaux sur $[a, b]$.
 En outre, pour tous $f, g \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, en notant $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f et à g (cf. remarque précédente), la combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ et le produit fg sont continues sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ et admettent des limites finies en x_{i-1} à droite et en x_i à gauche, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par opérations. Ainsi ces fonctions sont continues par morceaux sur $[a, b]$.
- (ii) La caractérisation de la continuité par morceaux via les parties réelle et imaginaire découle directement des caractérisations de la continuité et des limites via les parties réelle et imaginaire (théorèmes 54 et 57 du chapitre 16) et du théorème 11.
- (iii) • **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.** Soit $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f . Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, f se prolonge en une fonction continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ et est donc bornée sur ce segment (théorème des bornes atteintes), disons par K_i en valeur absolue. Au total, $|f|$ est majorée sur $[a, b]$ par $\max\{K_1, \dots, K_n, |f(x_0)|, \dots, |f(x_n)|\}$.
 • **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.** D'après le cas précédent et le point (ii), il existe deux réels positifs K_R et K_I tels que $|\operatorname{Re}(f)| \leq K_R$ et $|\operatorname{Im}(f)| \leq K_I$ et on a donc $|f| \leq \sqrt{K_R^2 + K_I^2}$ sur $[a, b]$. ■

Remarque 21 On peut aussi remarquer que l'espace des fonctions continues par morceaux sur un segment se réalise comme une somme de sous-espaces : $\mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K}) = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}) + \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$.

Définition 22 – Fonction continue par morceaux sur un intervalle

Soit I un intervalle. Une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite *continue par morceaux sur I* lorsqu'elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I . On note $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble de ces fonctions.

Exemple 23

- Toute fonction continue sur un intervalle est continue par morceaux sur cet intervalle : $\mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$.
- Les fonctions $x \mapsto [x]$ et $x \mapsto x - [x]$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Le théorème suivant sera crucial pour la construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux à la section suivante.

Théorème 24 – Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$,

- (i) il existe une fonction en escalier $\theta \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ telle que $|f - \theta| \leq \varepsilon$ (i.e. $\forall x \in [a, b], |f(x) - \theta(x)| \leq \varepsilon$);
 (ii) en particulier si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe des fonctions en escalier $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ pour lesquelles $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq \varepsilon$.

Démonstration. (i) Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$.

Cas où f est continue sur $[a, b]$. D'après le théorème de Heine, la fonction f est uniformément continue sur le segment $[a, b]$. On peut donc trouver un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a, b], |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Considérons alors une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de pas inférieur à η (par exemple à pas constant, cf. exemple 8) et définissons une fonction θ en escalier sur $[a, b]$ en posant :

$$\theta(a) = f(a) \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \forall x \in]x_{i-1}, x_i], \quad \theta(x) = f(x_i).$$

Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $x_{i-1} < x \leq x_i$ et on a $|x - x_i| \leq \eta$, ainsi, par continuité uniforme de f ,

$$|f(x) - \theta(x)| = |f(x) - f(x_i)| \leq \varepsilon.$$

Comme de plus $f(a) = \theta(a)$, on a

$$\forall x \in [a, b], |f(x) - \theta(x)| \leq \varepsilon.$$

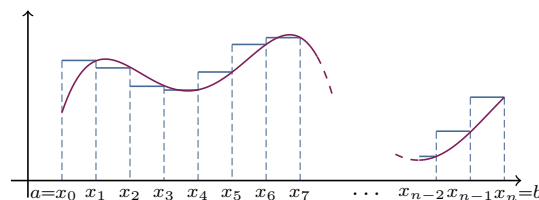
Cas général. Soit $\sigma = (x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une subdivision adaptée à la fonction continue par morceaux f . Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la restriction de f à $]x_{i-1}, x_i[$ se prolonge en une fonction f_i continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ et, d'après le cas précédent, on peut trouver une fonction θ_i en escalier sur $[x_{i-1}, x_i]$ telle que $|f_i - \theta_i| \leq \varepsilon$. Alors la fonction θ définie par

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \theta = \theta_i \text{ sur }]x_{i-1}, x_i[\quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \theta(x_i) = f(x_i),$$

est en escalier sur $[a, b]$ et vérifie $|f - \theta| \leq \varepsilon$.

(ii) Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. D'après (i), il existe $\theta \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telle que $|f - \theta| \leq \varepsilon/2$. Les fonctions en escaliers $\varphi = \theta - \varepsilon/2$ et $\psi = \theta + \varepsilon/2$ conviennent alors. ■

Remarque 25 Le résultat précédent est analogue à la propriété de densité des nombres rationnels dans $\mathbb{R}$. En un sens à préciser (en munissant l'ensemble $\mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$ d'une distance *ad hoc*), l'ensemble des fonctions en escaliers $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est dense dans celui des fonctions continues par morceaux $\mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$.



3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

La construction de l'intégrale présentée ci-après est essentiellement celle proposée par Riemann[†] au XIX^e siècle.

3.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Dans l'ensemble de ce paragraphe, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

Définition-théorème 26 – Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$. Si $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision adaptée à φ et si l'on note c_i la valeur de φ sur $]x_{i-1}, x_i[$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors la quantité

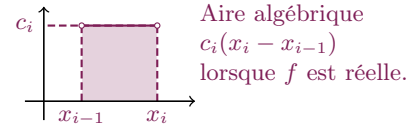
$$\sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1})$$

ne dépend pas de la subdivision σ choisie. On l'appelle *intégrale de φ sur $[a, b]$* et on la note $\int_{[a,b]} \varphi$.

Démonstration. Si σ est une subdivision adaptée à la fonction φ , notons

$$I(\varphi, \sigma) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) c_i.$$

On veut donc montrer que $I(\varphi, \sigma) = I(\varphi, \tau)$, pour toutes subdivisions σ et τ adaptées à φ .



Cas où τ est plus fine que σ . τ est obtenue en rajoutant un nombre fini de points à la subdivision σ . Pour démontrer que $I(\varphi, \tau) = I(\varphi, \sigma)$, il suffit donc de l'établir dans le cas où τ a un élément de plus que σ . Supposons donc que $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $\tau = (x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, y, x_p, \dots, x_n)$. La fonction φ vaut alors c_p sur $]x_{p-1}, y[$ et sur $]y, x_p[$, d'où

$$I(\varphi, \tau) = \sum_{i=1}^{p-1} (x_i - x_{i-1}) c_i + (y - x_{p-1}) c_p + (x_p - y) c_p + \sum_{i=p+1}^n (x_i - x_{i-1}) c_i = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) c_i = I(\varphi, \sigma).$$

Cas général. Si σ et τ sont deux subdivisions adaptées à φ , alors il existe une subdivision v plus fine que σ et τ (théorème 11), qui est donc aussi adaptée à φ . D'après le premier cas, on a

$$I(\varphi, \sigma) = I(\varphi, v) = I(\varphi, \tau),$$

d'où le résultat. ■

Remarque 27

- L'intégrale d'une fonction en escalier φ ne dépend pas des valeurs de φ aux points de la subdivision adaptée qui a servi à la calculer.
- Une fonction nulle sur un segment sauf en un nombre fini de points est en escalier et son intégrale est nulle. En effet, une subdivision adaptée contient les abscisses des points en lesquels la fonction n'est pas nulle.
- Par construction, l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment $[a, b]$ correspond à l'aire algébrique délimitée par sa courbe et l'axe des abscisses entre les abscisses a et b .

Théorème 28 – Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

(i) Linéarité. L'intégrale est une forme linéaire sur $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$.

(ii) Positivité. Pour tout $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, si $\varphi \geq 0$, alors $\int_{[a,b]} \varphi \geq 0$.

(iii) Croissance. Pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, si $\varphi \leq \psi$, alors $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$.

(iv) Relation de Chasles. Soit $c \in]a, b[$ et $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$. La fonction φ est en escalier sur $[a, b]$ si et seulement si ses restrictions $\varphi|_{[a,c]}$ et $\varphi|_{[c,b]}$ le sont sur $[a, c]$ et $[c, b]$ respectivement. Le cas échéant,

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi.$$

Démonstration. Cf. annexe A. ■

[†]. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 à Breselenz – 1866 à Selasca) est un mathématicien allemand qui contribua de façon cruciale à divers domaines des mathématiques de la topologie à la géométrie différentielle (surface de Riemann) en passant par l'analyse (fonction d'une variable complexe, intégrale d'une fonction).

3.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Dans l'ensemble de ce paragraphe, a et b désignent deux réels tels que $a < b$. Par ailleurs, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$, on notera $\mathcal{E}^+(f)$ (resp. $\mathcal{E}^-(f)$) l'ensemble des fonctions en escalier supérieures (resp. inférieures) ou égales à f sur $[a, b]$.

Définition-théorème 29 – Intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs réelles

Si $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$, alors

(i) $\left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\}$ admet une borne supérieure ; (ii) $\left\{ \int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+(f) \right\}$ admet une borne inférieure ;

et ces deux bornes sont égales. On appelle alors *intégrale de f sur $[a, b]$* le réel

$$\int_{[a,b]} f = \sup \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\} = \inf \left\{ \int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+(f) \right\}.$$

Démonstration. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. D'après le théorème 20, la fonction f est bornée, notons alors $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$.

• La fonction constante m (respectivement M) appartient à $\mathcal{E}^-(f)$ (respectivement à $\mathcal{E}^+(f)$), en particulier $\mathcal{E}^-(f)$ et $\mathcal{E}^+(f)$ sont non vides. De plus, si $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$, alors $\varphi \leq f \leq M$ et, par croissance de l'intégrale des fonctions en escalier,

$$\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} M = M(b-a).$$

L'ensemble $\left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\}$ est donc une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ et possède donc une borne supérieure α . Pour des raisons similaires, $\left\{ \int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+(f) \right\}$ est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ et possède donc une borne inférieure β .

• Toute fonction φ de $\mathcal{E}^-(f)$ est inférieure à toute fonction ψ de $\mathcal{E}^+(f)$ et par suite $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$ (théorème 28.(iii)).

Soit $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$ fixée. L'ensemble $\left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\}$ étant majoré par $\int_{[a,b]} \psi$, sa borne supérieure α est plus petite que cette intégrale. Le réel α est donc un minorant de l'ensemble $\left\{ \int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+(f) \right\}$, par conséquent il est plus petit que la borne inférieure de ce dernier. On en déduit donc $\alpha \leq \beta$.

• Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 24, on peut trouver $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ et $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$ telles que $\psi - \varphi \leq \varepsilon$. On a alors

$$\int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,b]} (\psi - \varphi) \leq \varepsilon(b-a),$$

par linéarité et croissance de l'intégrale des fonctions en escalier. Or, par définition de α et β , on a aussi

$$\int_{[a,b]} \varphi \leq \alpha \leq \beta \leq \int_{[a,b]} \psi.$$

Au total, $\alpha = \beta$, puisque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leq \beta - \alpha \leq \varepsilon(b-a).$$

Remarque 30 Si f est en escalier sur $[a, b]$, alors elle est continue par morceaux sur $[a, b]$ et son intégrale en tant que fonction continue par morceaux coïncide avec son intégrale en tant que fonction en escalier, ce qui légitime la notation commune de ces deux intégrales. En effet, puisque $f \in \mathcal{E}^-(f) \cap \mathcal{E}^+(f)$ l'intégrale de f en tant que fonction en escalier vérifie

$$\int_{[a,b]} f = \max \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\} = \min \left\{ \int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+(f) \right\}.$$

Définition 31 – Intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{C})$. Les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont alors continues par morceaux sur $[a, b]$ et on appelle *intégrale de f sur $[a, b]$* le complexe

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \operatorname{Re}(f) + i \int_{[a,b]} \operatorname{Im}(f).$$

En pratique Pour justifier qu'une intégrale est correctement définie, il suffit d'établir que la fonction intégrée est continue (éventuellement par morceaux) sur le segment concerné.

Exemple 32 L'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ est correctement définie dans la mesure où la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est définie et continue sur l'intervalle $]0, 1]$ et se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0, 1]$, en posant $f(0) = 1$.

Valeur moyenne Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$. En notant $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$ (théorème 20), on a $m \in \mathcal{E}^-(f)$ et $M \in \mathcal{E}^+(f)$, ainsi

$$m(b-a) = \int_{[a,b]} m \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} M = M(b-a).$$

Le réel $\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f$ est donc compris entre m et M . Ces considérations plaident pour la définition suivante.

Définition 33 – Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$. On appelle *valeur moyenne de f sur le segment $[a, b]$* la quantité $\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f$.

Exemple 34 Si σ est une subdivision adaptée à une fonction f en escalier sur $[a, b]$, alors la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ correspond à la moyenne des valeurs de la fonction sur chaque intervalle de la subdivision pondérée par les largeurs de chaque intervalle.

3.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux

Théorème 35 – Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $f, g \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$, avec $a < b$.

(i) Linéarité. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$.

Autrement dit, l'intégrale est une forme linéaire sur le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$.

(ii) Relation de Chasles. Pour tout $c \in]a, b[$, les restrictions $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$ sont continues par morceaux et

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f|_{[a,c]} + \int_{[c,b]} f|_{[c,b]}.$$

(iii) Si f et g sont égales sur $[a, b]$, sauf peut-être en un nombre fini de points, alors $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.

(iv) Inégalité triangulaire. $|f| \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$ et $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

Démonstration. Le point (iii) découle directement du deuxième point de la remarque 27 et de la linéarité de l'intégrale. En effet, pour deux fonctions f et g vérifiant les hypothèses de (iii), $f - g$ est une fonction nulle sur le segment $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points. Cf. annexe A pour les autres points. ■

Remarque 36 Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision adaptée à f . Notons f_i la fonction continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ dont la restriction à $]x_{i-1}, x_i[$ est égale à celle de f . La relation de Chasles nous donne alors :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^n \int_{[x_{i-1}, x_i]} f|_{[x_{i-1}, x_i]} = \sum_{i=1}^n \int_{[x_{i-1}, x_i]} f_i.$$

Ainsi, l'intégrale d'une fonction continue par morceaux est une somme d'intégrales de fonctions continues.

Les propriétés suivantes ne concernent que les fonctions à valeurs **RÉELLES** !

Théorème 37 – Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux réelle

Soit $f, g \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$, avec $a < b$.

- (i) **Positivité.** Si $f \geq 0$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$. (ii) **Croissance.** Si $f \leq g$, alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.
- (iii) **Positivité stricte.** Si f est positive sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et strictement positive en au moins un point de continuité, alors $\int_{[a,b]} f > 0$.
- (iv) **Nullité avec signe constant.** Si f est CONTINUE et de signe CONSTANT sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

✗ **ATTENTION !** ✗ Au point (iv), les hypothèses de continuité et de signe constant sont essentielles !

- La fonction cosinus est continue et non identiquement nulle sur $[0, \pi]$, tandis que son intégrale est nulle.
- La fonction $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est positive et non identiquement nulle sur $[0, 1]$, tandis que son intégrale est nulle.

Démonstration.

- (i) Si f est positive, alors la fonction nulle appartient à $\mathcal{E}^-(f)$ et son intégrale est plus petite que l'intégrale de f qui est donc positive.
- (ii) Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la fonction positive $g - f$ et d'utiliser la linéarité de l'intégrale.
- (iii) Par hypothèse, il existe une abscisse c en laquelle f est continue et $f(c) > 0$. Par continuité de f en c , f est alors strictement positive au voisinage de c . Précisément, il existe un segment $[u, v]$ contenant c avec $a \leq u < v \leq b$ et sur lequel f est minorée par $f(c)/2$. Alors, d'après la relation de Chasles et par croissance et positivité de l'intégrale,

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,u]} f + \int_{[u,v]} f + \int_{[v,b]} f \geq \int_{[u,v]} f \geq \int_{[u,v]} \frac{f(c)}{2} = (v-u) \frac{f(c)}{2} > 0.$$

- (iv) Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer f positive sur $[a, b]$. Si f est non identiquement nulle sur $[a, b]$, alors son intégrale sur $[a, b]$ est strictement positive d'après le point précédent, d'où le résultat en contraposant. ■

Notation définitive Soit I un intervalle, $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$ (on ne suppose plus ici que $a < b$). On note

$$\int_a^b f \text{ ou } \int_a^b f(x) dx \text{ l'élément de } \mathbb{K} \text{ égal à } \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\int_{[b,a]} f & \text{si } a > b. \end{cases}$$

✗ **ATTENTION !** ✗ Les propriétés énoncées précédemment restent valables dans ce nouveau cadre, à l'exception de celles liées aux **INÉGALITÉS** pour lesquelles les bornes a et b de l'intégrale $\int_a^b$ doivent être ordonnées : $a \leq b$. Précisément, si $b < a$ alors

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_b^a |f| \quad \text{et} \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ et } f \geq 0, \quad \int_a^b f \leq 0.$$

Corollaire 38 – Relation de Chasles

Si $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$, alors

$$\forall a, b, c \in I, \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Démonstration. Cf. annexe A. ■

Théorème 39 – Intégrale d'une fonction paire/impaire/périodique

- (i) Soit $a \geq 0$ et $f \in \mathcal{C}_{pm}([-a, a], \mathbb{K})$.
Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$. Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.
- (ii) Si $f \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est T -périodique, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$.

Démonstration. Cf. annexe A (et théorème 39 du chapitre 7 pour le cas plus simple d'une fonction continue). ■

4 Lien entre intégrale et primitive

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, dont découle l'ensemble des résultats des paragraphes 2.2, 2.4 et 2.5 du chapitre 7.

Théorème 40 – Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

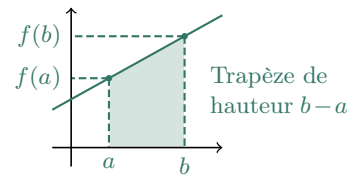
Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$. La fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

Démonstration. ...

Remarque 41 Rappelons qu'une conséquence primordiale du théorème précédent est l'existence de primitives pour n'importe quelle fonction CONTINUE sur un INTERVALLE.

Exemple 42 Une primitive de la fonction affine $f : x \mapsto \alpha x + \beta$ est $x \mapsto \frac{\alpha}{2}x^2 + \beta x$, ainsi

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{\alpha}{2}(b^2 - a^2) + \beta(b - a) = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a).$$



On retrouve ainsi l'aire d'un trapèze, et la valeur moyenne d'une fonction affine sur un segment $[a, b]$ est la moyenne des valeurs de cette fonction aux extrémités du segment.

Il est naturel de se demander ce qu'il advient si l'on suppose simplement que f est continue par morceaux sur I , ce que précise la remarque suivante.

Remarque 43 Soit f une fonction continue par morceaux sur $I = [a, b]$ et $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de I adaptée à f . Notons f_i la fonction continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ dont la restriction à $]x_{i-1}, x_i[$ est égale à celle de f . La relation de Chasles montre que, pour tout $x \in [x_{i-1}, x_i]$, on a

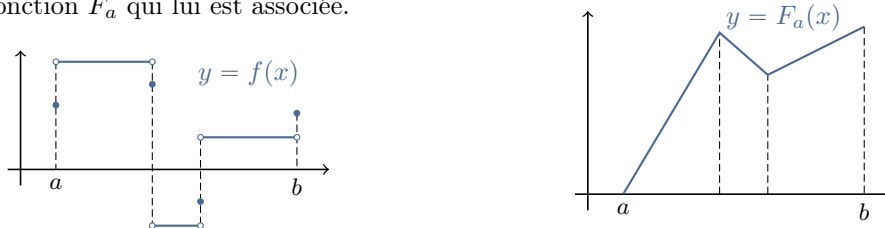
$$F_a(x) = F_a(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^x f_i(t) dt.$$

Comme la fonction $x \mapsto \int_{x_{i-1}}^x f_i(t) dt$ est définie et dérivable sur $[x_{i-1}, x_i]$, de dérivée f_i , on en déduit que F_a est dérivable en tout point de $]x_{i-1}, x_i[$ avec $F'_a(x) = f_i(x) = f(x)$.

De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, la fonction F_a est dérivable à droite et à gauche en x_i avec

$$(F_a)'_g(x_i) = f_i(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} f \quad \text{et} \quad (F_a)'_d(x_i) = f_{i+1}(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} f.$$

Si ces deux limites sont différentes, la fonction F_a n'est pas dérivable en x_i , et n'est donc pas une primitive de f . Cette situation est illustrée par le schéma suivant qui représente en parallèle les courbes représentatives d'une fonction en escalier f et de la fonction F_a qui lui est associée.



D'ailleurs, si une fonction continue par morceaux admet une primitive, alors elle est continue. En effet, une dérivée qui admet des limites à droite et à gauche en tout point est nécessairement continue puisque si F est dérivable et si la restriction de F' à $I \cap]-\infty, a[$ ou à $I \cap]a, +\infty[$ admet une limite ℓ en a , on sait d'après la formule des accroissements finis que $F'(a) = \ell$.

Corollaire 44

Si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, alors $\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f$.

Démonstration. Considérons $F : x \mapsto \int_a^x f$ sur $[a, b]$. Puisque f est continue sur $[a, b]$, F est une primitive de f sur $[a, b]$ et en particulier F est continue en b , d'où

$$\int_a^b f = F(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f.$$

On procède de la même façon pour l'autre limite.

Exemple 45 $\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$

5 Sommes de Riemann

Théorème 46 – Sommes de Riemann[†] (ou méthode des rectangles)

Si $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$, alors

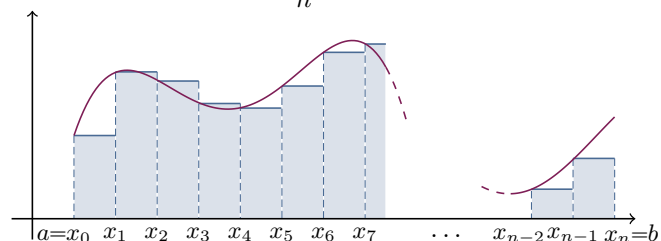
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

En outre, si f est lipschitzienne sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$

Ce théorème affirme en particulier l'existence des deux limites ci-dessus, où les sommes sont appelées *sommes de Riemann associées à la fonction f* .

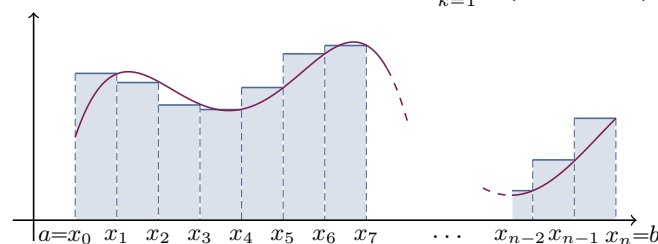
Démonstration. ...

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les sommes intervenant dans le théorème précédent s'interprète graphiquement : il s'agit d'une somme d'aires algébriques de rectangles de base $\frac{b-a}{n}$ qui approche l'aire algébrique de la surface délimitée par la courbe de f et l'axe des abscisses entre les abscisses a et b . Sur les figures ci-dessous, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on note x_k le point d'abscisse $a + k \frac{b-a}{n}$, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, ainsi $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$.



L'aire du domaine coloré vaut $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$

L'aire du domaine coloré vaut $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$



Remarque 47 L'approximation de l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ par l'une des deux sommes $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ ou $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ s'appelle la *méthode des rectangles*. Cette dernière fournit un procédé de calcul numérique des intégrales.

En pratique Dans la majorité des cas, lorsqu'il s'agit de reconnaître une somme de Riemann, on est ramené au cas particulier suivant pour lequel il est facile de déterminer la fonction f en jeu : pour tout $f \in \mathcal{C}_{pm}([0, 1], \mathbb{K})$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Exemple 48 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2.$

En effet, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ étant continue sur $[0, 1]$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2.$

[†]. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 à Breselenz – 1866 à Selasca) est un mathématicien allemand qui a notamment construit une théorie rigoureuse de l'intégrale d'une fonction.

6 Calcul asymptotique en lien avec des intégrales

6.1 Limite d'intégrales

✗ **ATTENTION !** ✗ Face à des calculs de limites du type $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b f(x, t) dt$ il est primordial d'être conscient qu'en général

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt \neq \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b f(x, t) dt \neq \int_a^b \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t) dt.$$

autrement dit, on ne peut pas permuter a priori les symboles de limite et d'intégrale.

Exemple 49 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons $f_n : t \mapsto nt^{n-1}$ sur $[0, 1[$ prolongée en 1 par $f_n(1) = 0$. Cette fonction est continue par morceaux sur $[0, 1]$ et, pour tout $t \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = 0$. Par conséquent

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \int_0^1 0 dt = 0 \quad \text{tandis que} \quad \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 nt^{n-1} dt = [t^n]_0^1 = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

🔗 **En pratique** 🔗 Pour calculer des limites d'intégrales, il convient en général de procéder par encadrement.

Exemple 50 Si $f \in \mathcal{C}_{pm}([0, 1], \mathbb{R})$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$.

Exemple 51 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \ln 2$.

6.2 Développements asymptotiques et équivalents d'intégrales

🔗 **En pratique** 🔗 Les deux techniques essentielles sont l'encadrement et l'intégration par parties.

Exemple 52 $\int_x^{x+1} e^t \ln t dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (e-1)e^x \ln x$.

Exemple 53 – Exemple de développement asymptotique via une IPP Pour tout $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{K})$,

$$\int_0^1 t^n f(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{En particulier, si } f(1) \neq 0, \quad \int_0^1 t^n f(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}.$$

Exemple 54 $\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

7 Formules de Taylor

Dans l'ensemble de cette section, a et b désignent deux éléments d'un intervalle I contenant au moins deux points et n est un entier naturel.

7.1 Formule de Taylor avec reste intégrale

Théorème 55 – Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n en a

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$, alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt.$$

Démonstration. ... ■

Remarque 56

- Observons que pour $n = 0$, cette formule n'est jamais que le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral :

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt \quad \text{avec } f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}).$$

- Le changement de variable affine $t = a + (b - a)u$ permet d'exprimer le reste à l'aide d'une intégrale entre 0 et 1 :

$$\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b - t)^n dt = (b - a)^{n+1} \int_0^1 \frac{f^{(n+1)}(a + (b - a)u)}{n!} (1 - u)^n du.$$

Exemple 57 Pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

7.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 58 – Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n en a

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et si M majore $|f^{(n+1)}|$ sur le segment d'extrémités a et b , alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k \right| \leq \frac{M |b - a|^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

En particulier, $M = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$ convient.

Démonstration. ...

L'inégalité de Taylor-Lagrange fournit donc un encadrement d'une fonction sur un segment par deux polynômes de même degré.

Remarque 59

- Dans le théorème précédent, la fonction $|f^{(n+1)}|$ est réputée continue sur I , elle est donc bornée sur le segment $[a, b]$ (théorème des bornes atteintes), ce qui assure l'existence de M .
- Pour $n = 0$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis.
- Un simple changement de variable ($h = b - a$) donne l'inégalité de Taylor-Lagrange sous la forme

$$\left| f(a + h) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \right| \leq \frac{M |h|^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

Exemple 60 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{x^4}{24}$, ce qui équivaut à $x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$.

Exemple 61 – À connaître ! Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$, ce que l'on note aussi $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$.

Remarque 62 Les trois formules de Taylor que nous avons énoncées visent chacune à donner une estimation de l'erreur commise en approchant f par son *développement de Taylor*, i.e. la fonction polynomiale

$$x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

lorsqu'elle existe. Les trois évaluations obtenues du *reste de Taylor* (différence entre f et son développement de Taylor) sont plus ou moins précises suivant que les hypothèses de régularité sur f sont plus ou moins fortes, l'estimation la plus précise étant donnée par la formule de Taylor avec reste intégral qui livre une expression exacte du reste. Notons enfin que la formule de Taylor-Young, qui fournit une information locale avec une approximation de f valable au voisinage de a , est par nature différente de la formule de Taylor avec reste intégrale et de l'inégalité de Taylor-Lagrange, qui donnent une information globale valable sur la totalité de l'intervalle I .

Compétences à acquérir

- Montrer qu'une fonction est uniformément continue : exercices 1 et 2.
- Calculer des limites en lien avec des sommes de Riemann : exercices 17 à 21.
- Utiliser les sommes de Riemann dans le calcul intégral : exercices 23 et 24.
- Déterminer une limite en lien avec une intégrale : exercices 25 à 30.
- Déterminer un équivalent/un développement asymptotique en lien avec une intégrale : exercices 32 à 38.
- Établir des inégalités grâce à une formule de Taylor : exercices 40 et 43 à 45.
- Obtenir un développement en série entière via une formule de Taylor : exercices 41 et 42.

Quelques résultats classiques :

- Un développement asymptotique via une IPP (exemple 53).
- Développement en série entière de l'exponentielle (exemple 61).
- Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire pour l'intégrale (exercice 7).
- Formules de la moyenne (exercice 12).
- Valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b (f(t))^n dt \right)^{1/n}$ (exercice 28).
- Formule du binôme négatif (exercice 42).

A Annexe

Démonstration du théorème 6.

Soit f une application continue sur un segment I . Supposons par l'absurde que f ne soit pas uniformément continue sur I , i.e.

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists (x, y) \in I^2, \quad |x - y| \leq \eta \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| > \varepsilon.$$

Considérons un tel $\varepsilon > 0$. Pour tout $\eta = 2^{-n}$, avec $n \in \mathbb{N}$, on peut donc choisir $(x_n, y_n) \in I^2$ tel que

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

Les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construites vérifient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon. \quad (*)$$

L'intervalle I étant borné, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et on peut donc en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers un élément α (théorème de Bolzano-Weierstrass), et ce dernier appartient à I puisque I est un intervalle fermé. Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} + (y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}),$$

on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\varphi(n)} = \alpha$, par somme de limites. Or, l'application f étant continue en α , on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) - \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_{\varphi(n)}) = f(\alpha) - f(\alpha) = 0,$$

ce qui contredit (*).

Démonstration du théorème 28. Soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision adaptée à φ et ψ (cf. remarque 14). Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note c_i (respectivement d_i) la valeur de la fonction φ (respectivement ψ) sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$.

(i) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda\varphi + \mu\psi$ vaut $\lambda c_i + \mu d_i$ sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ et

$$\int_{[a,b]} \lambda\varphi + \mu\psi = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(\lambda c_i + \mu d_i) = \lambda \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})c_i + \mu \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})d_i = \lambda \int_{[a,b]} \varphi + \mu \int_{[a,b]} \psi.$$

(ii) Si φ est à valeurs réelles et positive sur $[a, b]$, alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les $c_i \geq 0$ et $x_i - x_{i-1} > 0$, ainsi

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})c_i \geq 0.$$

(iii) Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la fonction en escalier positive $\psi - \varphi$, puis d'utiliser la linéarité de l'intégrale.

- (iv) • Considérons une subdivision adaptée à φ . En lui ajoutant éventuellement le point c , on obtient une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ encore adaptée à φ et contenant le point c . Désignons alors par p l'entier strictement compris entre 0 et n tel que $c = x_p$.

× $(x_i)_{0 \leq i \leq p}$ est une subdivision de $[a, c]$ et, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la fonction φ est constante sur $]x_{i-1}, x_i[$. Ainsi $\varphi|_{[a, c]}$ est en escalier sur $[a, c]$

× De même, $(x_i)_{p \leq i \leq n}$ est une subdivision de $[c, b]$ et $\varphi|_{[c, b]}$ est en escalier sur $[c, b]$.

Si c_i est la valeur de φ sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, on a alors

$$\int_{[a, b]} \varphi = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})c_i = \sum_{i=1}^p (x_i - x_{i-1})c_i + \sum_{i=p+1}^n (x_i - x_{i-1})c_i = \int_{[a, c]} \varphi + \int_{[c, b]} \varphi.$$

- Réciproquement, supposons $\varphi|_{[a, c]}$ et $\varphi|_{[c, b]}$ en escalier. Si

× $(x_i)_{0 \leq i \leq p}$ est une subdivision de $[a, c]$ adaptée à $\varphi|_{[a, c]}$,

× $(y_j)_{0 \leq j \leq q}$ est une subdivision de $[c, b]$ adaptée à $\varphi|_{[c, b]}$,

alors $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, x_p = c = y_0, y_1, \dots, y_q)$ est une subdivision de $[a, b]$ et φ est constante sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ et $]y_{j-1}, y_j[$. Par conséquent φ est en escalier sur $[a, b]$.

Démonstration des points (i) et (ii) du théorème 35.

(i) Linéarité.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. • Si f est une fonction continue par morceaux et si θ est une fonction en escalier telle que $|f - \theta| \leq \varepsilon$, on a alors l'encadrement $\theta - \varepsilon \leq f \leq \theta + \varepsilon$, ce qui prouve

$$\int_{[a, b]} (\theta - \varepsilon) \leq \int_{[a, b]} f \leq \int_{[a, b]} (\theta + \varepsilon)$$

et donc

$$\left| \int_{[a, b]} f - \int_{[a, b]} \theta \right| \leq (b - a)\varepsilon.$$

• Soit f_1 et f_2 deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, ainsi que λ_1 et λ_2 deux réels. Pour $\varepsilon > 0$ quelconque, prenons θ_1 et θ_2 deux fonctions en escalier telles que

$$|f_1 - \theta_1| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |f_2 - \theta_2| \leq \varepsilon$$

ce qui entraîne, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$\left| \int_{[a, b]} f_i - \int_{[a, b]} \theta_i \right| \leq (b - a)\varepsilon.$$

Posons $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ et $\theta = \lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2$. Alors

$$|f - \theta| \leq |\lambda_1| |f_1 - \theta_1| + |\lambda_2| |f_2 - \theta_2| \leq (|\lambda_1| + |\lambda_2|)\varepsilon$$

Et par suite

$$\left| \int_{[a, b]} f - \int_{[a, b]} \theta \right| \leq (b - a)(|\lambda_1| + |\lambda_2|)\varepsilon.$$

La linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{E}([a, b])$ permet aussi d'écrire

$$I = \int_{[a, b]} (\lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2) = \lambda_1 \int_{[a, b]} \theta_1 + \lambda_2 \int_{[a, b]} \theta_2$$

ce qui donne

$$\left| \lambda_1 \int_{[a, b]} f_1 + \lambda_2 \int_{[a, b]} f_2 - I \right| \leq (b - a)(|\lambda_1| + |\lambda_2|)\varepsilon$$

et donc

$$\begin{aligned} \Delta &= \left| \int_{[a, b]} f - \lambda_1 \int_{[a, b]} f_1 - \lambda_2 \int_{[a, b]} f_2 \right| \\ &= \left| \int_{[a, b]} f - I + I - \lambda_1 \int_{[a, b]} f_1 - \lambda_2 \int_{[a, b]} f_2 \right| \\ &\leq \left| \int_{[a, b]} f - I \right| + \left| I - \lambda_1 \int_{[a, b]} f_1 - \lambda_2 \int_{[a, b]} f_2 \right| \\ &\leq 2(b - a)(|\lambda_1| + |\lambda_2|)\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui prouve $\Delta = 0$ et finalement

$$\int_{[a, b]} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \int_{[a, b]} f_1 + \lambda_2 \int_{[a, b]} f_2.$$

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- D'après la définition, il est évident que l'on a pour des fonctions continues par morceaux f et g

$$\int_{[a,b]} (f + g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g.$$

- Soit $f = g + ih$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $\lambda = \alpha + i\beta$ un complexe. On a

$$\lambda f = (\alpha g - \beta h) + i(\alpha h + \beta g)$$

ainsi, par définition et par linéarité de l'intégrale pour les fonctions à valeurs réelles,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} \lambda f(x) &= \int_{[a,b]} (\alpha g - \beta h) + i \int_{[a,b]} (\alpha h + \beta g) \\ &= \alpha \int_{[a,b]} g - \beta \int_{[a,b]} h + i \left(\alpha \int_{[a,b]} h + \beta \int_{[a,b]} g \right) \\ &= (\alpha + i\beta) \left(\int_{[a,b]} g + i \int_{[a,b]} h \right) \\ &= \lambda \int_{[a,b]} f. \end{aligned}$$

(ii) Relation de Chasles.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On montre sans difficulté que $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$ sont continues par morceaux. Soit alors φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ plus petite que f . On a

$$\varphi|_{[a,c]} \in \mathcal{E}^-(f|_{[a,c]}) \quad \text{et} \quad \varphi|_{[c,b]} \in \mathcal{E}^-(f|_{[c,b]})$$

et, d'après le théorème 28,

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi|_{[a,c]} + \int_{[c,b]} \varphi|_{[c,b]} \leq \int_{[a,c]} f|_{[a,c]} + \int_{[c,b]} f|_{[c,b]}.$$

Le réel $\int_{[a,c]} f|_{[a,c]} + \int_{[c,b]} f|_{[c,b]}$, qui est un majorant de l'ensemble $\left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\}$ est donc plus grand que la borne supérieure de ce dernier, ce qui donne

$$\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,c]} f|_{[a,c]} + \int_{[c,b]} f|_{[c,b]}.$$

En appliquant ce résultat à $-f$, on en déduit l'inégalité inverse par linéarité de l'intégrale, et donc

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f|_{[a,c]} + \int_{[c,b]} f|_{[c,b]}.$$

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Découle directement du cas précédent et de la définition 31.

(iii) Inégalité triangulaire.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision adaptée à la fonction f . Alors la restriction de f à chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ est continue et admet des limites en x_{i-1} et x_i . Il en est donc de même pour la fonction $|f|$, par opérations. En intégrant la double inégalité $-|f| \leq f \leq |f|$, on obtient, par croissance de l'intégrale (théorème 37) et linéarité (point (i)),

$$-\int_{[a,b]} |f| \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} |f|,$$

ce qui équivaut à l'inégalité annoncée.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Supposons $\int_{[a,b]} f \in \mathbb{R}_+$ et posons $g = \operatorname{Re}(f)$ et $h = \operatorname{Im}(f)$. Alors

$$\int_{[a,b]} h = 0 \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} g = \int_{[a,b]} f = \left| \int_{[a,b]} f \right|$$

Or $g = \operatorname{Re}(f) \leq |f|$, ainsi $\int_{[a,b]} g \leq \int_{[a,b]} |f|$, ce qui donne l'inégalité souhaitée.

- Dans le cas général, on peut trouver un nombre complexe λ de module 1 tel que $\lambda \int_{[a,b]} f \in \mathbb{R}_+$ (prendre $\lambda = e^{-i\theta}$ où θ est un argument de $\int_{[a,b]} f$ si cette intégrale est non nulle, et $\lambda = 1$ sinon). Alors la fonction $\tilde{f} = \lambda f$ a une intégrale réelle positive et, d'après ce qui précède,

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| = \left| \frac{1}{\lambda} \right| \left| \int_{[a,b]} \tilde{f} \right| = \left| \int_{[a,b]} \tilde{f} \right| \leq \int_{[a,b]} |\tilde{f}| = \int_{[a,b]} |f|.$$

Démonstration du corollaire 38.

- Le cas où $a < c < b$ avec la nouvelle notation correspond au point **(ii)** du théorème 35.
- Si $a < b < c$, toujours d'après le point **(ii)** du théorème 35,

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

d'où

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- Les cas. $b < a < c$, $b < c < a$, $c < a < b$ et $c < b < a$ se traitent de la même façon.
- Enfin, si a , b et c ne sont pas deux à deux distincts, le résultat est immédiat.

Démonstration du théorème 39.

Le théorème découle essentiellement de la relation de Chasles combinée au théorème suivant.

Théorème 63 – Invariance par translation

Soient f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et α un réel. La fonction f_α définie par $f_\alpha(x) = f(x - \alpha)$ est continue par morceaux sur $[a + \alpha, b + \alpha]$ et

$$\int_{[a, b]} f = \int_{[a + \alpha, b + \alpha]} f_\alpha.$$

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

• Supposons f en escalier sur $[a, b]$. Soit $\sigma = (x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une subdivision adaptée à f , alors la famille $(y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ définie par $y_i = x_i + \alpha$ est une subdivision de $[a + \alpha, b + \alpha]$. Si f vaut c_i sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, alors f_α est constante et vaut aussi c_i sur l'intervalle $]x_{i-1} + \alpha, x_i + \alpha[$. Ainsi f_α est en escalier sur $[a + \alpha, b + \alpha]$ et

$$\int_{[a + \alpha, b + \alpha]} f_\alpha = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i-1}) c_i = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) c_i = \int_{[a, b]} f.$$

- Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, d'après le résultat précédent, on a pour

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \quad \int_{[a, b]} \varphi = \int_{[a + \alpha, b + \alpha]} \varphi_\alpha,$$

où φ_α est définie sur $[a + \alpha, b + \alpha]$ par $\varphi_\alpha(x) = \varphi(x - \alpha)$. Or $\mathcal{E}^-(f_\alpha) = \{\varphi_\alpha \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\}$, ainsi

$$\begin{aligned} \int_{[a + \alpha, b + \alpha]} f_\alpha &= \sup \left\{ \int_{[a + \alpha, b + \alpha]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^-(f_\alpha) \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_{[a + \alpha, b + \alpha]} \varphi_\alpha \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_{[a, b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\} \\ &= \int_{[a, b]} f. \end{aligned}$$

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Découle directement du cas précédent.