23 | Espaces vectoriels de dimension finie

Dans l'ensemble de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. †

1 Dimension d'un espace vectoriel

La notion de dimension nous est a priori intuitive. Nul n'ignore qu'une droite ou même une courbe est de dimension 1, qu'un plan ou même une surface est de dimension 2 et que nous vivons dans un espace à trois dimensions. Il n'est toutefois pas aisé de donner un sens rigoureux à ces idées courantes, ce qui est le l'objet de cette section : proposer une définition axiomatique de la dimension et en donner la théorie.

Définition 1 – Espace vectoriel de dimension finie

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit *de dimension finie* lorsqu'il possède une partie génératrice FINIE, et *de dimension infinie* dans le cas contraire

Exemple 2 Les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, avec $n, p \in \mathbb{N}^*$, et $\mathbb{K}_n[X]$, avec $n \in \mathbb{N}$, sont de dimension finie.

En effet, leurs bases canoniques respectives sont des familles génératrices finies.

Exemple 3 Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

1.1 Existence de bases en dimension finie

Théorème 4 – Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie engendré par n éléments, alors toute partie libre de E possède au plus n éléments.

Démonstration. ... ■

Après ce premier théorème fondamental, qui affirme que toute famille génératrice a au moins autant d'éléments que n'importe quelle famille libre, l'*algorithme de la base incomplète* présenté ci-après sera notre deuxième outil pour établir l'existence de bases finies en dimension finie.

Théorème 5 – Algorithme de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille génératrice de E dont les p premiers vecteurs sont linéairement indépendants, avec $p \leqslant n$. L'espace E possède alors une base constituée des vecteurs $x_1, \dots, x_p$ et de certains des vecteurs $x_{p+1}, \dots, x_n$ et l'on dispose d'un algorithme, dit *de la base incomplète*, pour déterminer de façon effective une telle base.

L'algorithme consiste à compléter peu à peu la famille LIBRE $(x_1, \dots, x_p)$ à l'aide de certains vecteurs parmi $x_{p+1}, \dots, x_n$, en prenant soin de CONSERVER LA LIBERTÉ À CHAQUE AJOUT. Précisément,

- la variable $\mathscr{B}$ est initialisée à la valeur $(x_1, \dots, x_p)$ – une famille LIBRE ;
- pour k décrivant $[\![p+1\,, n]\!]$: si la famille $\mathscr{B}$ augmentée de x_k est libre, *i.e.* si x_k n'est pas combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$, on remplace $\mathscr{B}$ par la famille $\mathscr{B}$ augmentée de x_k.

Démonstration. Ayant pris soin de conserver la liberté de $\mathscr{B}$ à chaque étape de l'algorithme, la famille $\mathscr{B}$ finale est libre. Il ne reste donc plus qu'à établir que cette famille finale $\mathscr{B}$ engendre E. Or, $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendrant E, il suffit de montrer que tous les x_k sont combinaisons linéaires des éléments de la famille $\mathscr{B}$, ce qui est clair par construction de cette dernière. ■

Remarque 6 L'algorithme de la base incomplète reste valable pour les valeurs $n = 0$ ou $p = 0$, pour lesquelles la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant 0}$ est la famille vide $\varnothing$.

†. Tous les résultats énoncés dans ce chapitre demeurent vrais sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque.

Exemple 7 La famille $((1,-5,7),(2,6,8))$ est une base de $F = \mathrm{Vect}((1,-5,7),(2,6,8),(3,1,15),(1,11,1))$.

Théorème 8 – Théorème de la base extraite/incomplète, existence de base finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

(i) Théorème de la base extraite. De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base (finie) de E.

(ii) Théorème de la base incomplète. Toute famille libre de E peut être complétée en une base (finie) de E.

En particulier, E possède une base finie.

Ainsi la définition « posséder une famille génératrice finie » des espaces vectoriels de dimension finie équivaut à « posséder une base finie ».

Démonstration. Le cas $E = \{0_E\}$ est clair et peut être exclu par la suite.

(i) Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice quelconque de E. Par hypothèse, E possède une famille génératrice finie $\mathscr{X}$. Chaque vecteur de $\mathscr{X}$ s'exprime alors comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de $\mathscr{G}$, par conséquent E est engendré par une sous-famille finie $\mathscr{G}'$ de $\mathscr{G}$. Il suffit alors d'appliquer l'algorithme de la base incomplète à $\mathscr{G}'$ et à la famille vide pour obtenir une base qui comme voulu est une sous-famille de $\mathscr{G}$.

(ii) Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E. Par hypothèse E admet une famille génératrice finie, ainsi $\mathscr{L}$ est finie en vertu du théorème 4. Il suffit d'ajouter à $\mathscr{L}$ les vecteurs d'une famille génératrice finie de E, puis d'appliquer l'algorithme de la base incomplète. $\mathscr{L}$ est alors complétée en une base finie de E. ■

1.2 Dimension d'un espace vectoriel

Il semble raisonnable de vouloir définir la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie comme le nombre de vecteurs de ses bases, soit le nombre de coordonnées nécessaires pour décrire les éléments de cet espace. Mais est-on assurés que toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même cardinal ? Le théorème suivant répond positivement à cette question. Il découle pour l'essentiel du théorème 4 qui affirme que toute famille génératrice a au moins autant d'éléments que n'importe quelle famille libre.

Définition-théorème 9 – Dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E sont finies de même cardinal et ce cardinal unique est appelé la *dimension de E (sur $\mathbb{K}$)* et noté $\dim E$.

Si $\dim E = 1$, on dit que E est une *droite (vectorielle)*, et si $\dim E = 2$, on dit que E est un *plan (vectoriel)*.

Démonstration. D'après le théorème 4, E étant de dimension finie, toutes les familles libres de E sont finies, donc en particulier ses bases. En outre, E possède des bases (finies) d'après le théorème 8. Considérons ainsi $\mathscr{B}$ une base de E de cardinal n et $\mathscr{B}'$ une base de E de cardinal n'. Puisque $\mathscr{B}$ engendre E et $\mathscr{B}'$ est libre, on a $n' \leqslant n$ (toujours d'après le théorème 4) et, par symétrie des rôles de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, on a aussi $n \leqslant n'$. Finalement $n = n'$. ■

Exemple 10

- L'espace trivial $\{0_E\}$ est de dimension 0, son unique base étant $\varnothing$.
- Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ est de dimension 1, *i.e.* une droite vectorielle.
- Le corps $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1, mais un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 (il admet pour $\mathbb{R}$-base $(1,i)$). Dans ce contexte, on peut écrire $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ pour préciser quel est le corps des scalaires considéré.

Théorème 11 – Dimension de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Pour tous $n,p \in \mathbb{N}^*$, $\dim \mathbb{K}^n = n$ et $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$.

Démonstration. Il suffit de dénombrer les vecteurs des bases canoniques respectives de ces espaces vectoriels. ■

Exemple 12 Pour tout intervalle I non vide et non réduit à un point et pour toute fonction $a \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$, l'espace des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $y' + a(t)y = 0$ est de dimension 1.

En effet, il s'agit de la droite vectorielle $\mathrm{Vect}\left(t \longmapsto \mathrm{e}^{-A(t)}\right)$, où A est une primitive de a sur I.

Exemple 13 Pour tous $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$,

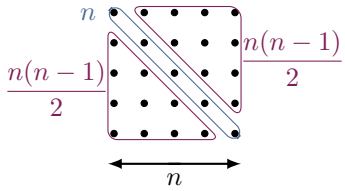
- l'espace des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène scalaire du second ordre $ay'' + by' + cy = 0$ est de dimension 2.
- l'espace des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire homogène du second ordre $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ est de dimension 2.

En effet, notant P le polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$ de l'équation différentielle,

- si P a deux racines distinctes r et s dans $\mathbb{K}$, alors l'espace des solutions est engendrée par la famille $(x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}, x \longmapsto \mathrm{e}^{sx})$ formée de deux vecteurs non colinéaires ;
- si P a une racine double r dans $\mathbb{K}$, alors l'espace des solutions est engendrée par la famille $(x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}, x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{rx})$ formée de deux vecteurs non colinéaires ;
- si P a deux racines complexes conjuguées $r \pm i\omega$ dans $\mathbb{C}$, alors l'espace des solutions est engendrée par la famille $(x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}\cos(\omega x), x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}\sin(\omega x))$ formée de deux vecteurs non colinéaires ;

ainsi dans tous les cas l'espace des solutions admet une base de cardinal 2 et est donc un plan vectoriel. On dispose bien sûr de résultats analogues pour les suites.

Exemple 14 Notons $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ celui des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Ce sont là deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pour lesquels $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.



Théorème 15 – Dimension *vs* cardinal d'une partie libre/génératrice

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n,

(i) toute partie libre possède au plus n éléments ; **(ii)** toute partie génératrice possède au moins n éléments.

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors E possède une base $\mathscr{B}$ de cardinal n. Pour toute partie libre Y de E, sachant que $\mathscr{B}$ engendre E, on a déjà vu que Y possède au plus n éléments (cf. théorème 4). De même, pour toute partie génératrice X de E, sachant que $\mathscr{B}$ est libre, $\mathscr{B}$ possède au plus autant d'éléments que X, de sorte que X possède au moins n éléments. ■

Exemple 16 – Polynôme annulateur non nul Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(A) = 0$.

Corollaire 17 – Caractérisation des espaces de dimension infinie

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension infinie si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

Démonstration. Le sens réciproque est claire d'après le théorème 15. Pour le sens direct, supposons que E est de dimension infinie et construisons une telle suite par récurrence sur n.

- E étant de dimension infinie il n'est pas réduit à $\{0_E\}$ et il existe donc un vecteur non nul x_0 dans E pour lequel la famille (x_0) est libre.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons construit une famille libre $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de vecteurs de E. Puisque E est de dimension infinie, $\mathrm{Vect}(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \subsetneq E$ et on peut donc considérer $x_{n+1} \in E \setminus \mathrm{Vect}(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. Par construction de x_{n+1}, la famille $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ est libre. ■

Théorème 18 – Caractérisation des bases en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Pour une famille $\mathscr{B}$ de n vecteurs s'équivalent :

(i) $\mathscr{B}$ est une base de E ; **(ii)** $\mathscr{B}$ est une famille libre de E ; **(iii)** $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de E.

Démonstration. Il suffit d'établir les implications **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)** et **(iii)** $\Longrightarrow$ **(i)** dont les réciproques sont triviales. Si la famille $\mathscr{B}$ de n vecteurs de E est libre (resp. génératrice), on peut la compléter en une base de E d'après le théorème de la base incomplète (resp. en extraire une base de E d'après le théorème de la base extraite). Par définition de la dimension, le résultat en est dans les deux cas une famille de n vecteurs, autrement dit $\mathscr{B}$ elle-même, qui était donc une base initialement. ■

✖ ATTENTION ! ✖ Ce théorème ne dit pas que « base = famille libre = famille génératrice » en dimension finie ! Il énonce seulement que cette coïncidence est vraie pour les familles qui ont EXACTEMENT AUTANT de vecteurs que la dimension de l'espace ambiant.

✎ **En pratique** ✎ Pour prouver qu'une famille de vecteurs est une base d'un espace vectoriel de dimension finie CONNUE, il suffit de vérifier que cette famille compte le bon nombre d'éléments et qu'elle est libre OU génératrice.

Exemple 19 Deux vecteurs non colinéaires d'un plan vectoriel en forment une base.

Exemple 20 La famille $((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1))$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

2 Relations entre les dimensions

2.1 Dimension *vs* isomorphisme

Théorème 21 – Classification des espaces vectoriels de dimension finie

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est de dimension finie non nulle n si et seulement s'il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. ... ■

Connaître la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie équivaut à tout savoir de lui, puisqu'il est alors « identique » à un $\mathbb{K}^n$ d'un point de vue purement vectoriel. En résumé, à isomorphisme près, les seuls $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle sont les espaces $\mathbb{K}^n$, n décrivant $\mathbb{N}^*$.

Corollaire 22

Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.

Démonstration. La relation « être isomorphe » est transitive. ■

2.2 Dimensions de $E \times F$ et $\mathscr{L}(E,F)$

L'exemple qui suit éclaire la preuve que nous allons donner du théorème ci-après.

Exemple 23 La famille $\big((1,0),(X,0),(X^2,0),(0,1),(0,X)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]\times\mathbb{R}_1[X]$, obtenue en combinant les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$. Les coordonnées d'un vecteur quelconque $\big(aX^2+bX+c, dX+e\big)$ dans cette base sont (c,b,a,e,d).

Théorème 24 – Dimension d'un espace vectoriel produit

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors $E\times F$ est de dimension finie et

$$\dim(E\times F) = \dim E + \dim F.$$

Démonstration. ... ■

Remarque 25

- Le résultat précédent se généralise par récurrence au cas d'un nombre fini quelconque d'espaces vectoriels de dimension finie, avec
$$\dim(E_1\times\cdots\times E_n) = \dim E_1 + \cdots + \dim E_n.$$
On retrouve par exemple $\dim\mathbb{K}^n = n\dim\mathbb{K} = n$.
- Il est important de retenir que l'on obtient une base $((e_1,0_F),\dots,(e_m,0_F),(0_E,f_1),\dots,(0_E,f_n))$ de $E\times F$ en combinant des bases respectives $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ de E et $(f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de F.

Théorème 26 – Dimension d'un espace vectoriel d'applications linéaires

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et

$$\dim\mathscr{L}(E,F) = \dim E\times\dim F.$$

Démonstration. ... ■

2.3 Dimension des sous-espaces vectoriels et de leurs sommes

Théorème 27 – Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

Démonstration. ... ■

Exemple 28 Dans la mesure où $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1, ses sous-espaces vectoriels ne peuvent être que de dimension 0 ou 1. Par conséquent, $\mathbb{K}$ ne possède que deux sous-espaces vectoriels, à savoir $\{0_\mathbb{K}\}$ et $\mathbb{K}$.

Définition 29 – Dimension d'un sous-espace affine

Si $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de direction F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle *dimension de* $\mathscr{F}$ la dimension de sa direction F.

Exemple 30 Les droites (resp. plans) affines sont les sous-espaces affines de dimension 1 (resp. 2).

Le théorème 88 du chapitre 21 affirme que si des parties X et Y engendrent respectivement deux sous-espaces vectoriels F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $X \cup Y$ engendre la somme $F + G$. En revanche, si X et Y sont en outre libres (et donc des bases respectives de F et G), on ne peut rien dire en général quant à la liberté de $X \cup Y$. En effet, les vecteurs de $F \cap G$ sont à la fois combinaisons linéaires des vecteurs de X et combinaisons linéaires des vecteurs de Y. La formule de Grassmann[†] ci-après mesure cette obstruction à l'indépendance linéaire.

Théorème 31 – Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de DIMENSION FINIE de E, alors leur somme $F + G$ est aussi de dimension finie et précisément

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Démonstration. ... ■

Corollaire 32 – Dimension de la somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si F et G sont de dimension finie et en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule de Grassmann, sachant $F \cap G = \{0_E\}$. ■

Comme nous l'avions annoncé au chapitre 21, nous sommes maintenant en mesure de prouver l'existence de supplémentaires en dimension finie.

Théorème 33 – Existence de supplémentaires en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de DIMENSION FINIE et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F possède un supplémentaire dans E et tous les supplémentaires de F dans E ont la même dimension, à savoir $\dim E - \dim F$.

Démonstration. ... ■

✎ **En pratique** ✎ La preuve du théorème précédent fournit une méthode pour construire un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie : il suffit de compléter une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E, dite *base adaptée de E au sous-espace F*, un supplémentaire de F dans E étant alors donné par $\mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.

Exemple 34 $\mathrm{Vect}\big(X, X^3\big)$ est un supplémentaire de $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X+1) = P(1-X)\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

†. Hermann Günther Grassmann (1809 à Stettin – 1877 à Stettin) est un mathématicien allemand et un des fondateurs de la théorie des espaces vectoriels.

Théorème 35 – Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Considérons les trois assertions :

(i) $\dim F + \dim G = \dim E$; **(ii)** $F \cap G = \{0_E\}$; **(iii)** $F + G = E$.

Les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si deux des trois assertions précédentes sont vraies – la troisième l'étant alors automatiquement.

Démonstration. Il suffit d'établir que deux des trois assertions entraînent la troisième.

- (i) et $(ii) \implies (iii)$ D'après la formule de Grassmann, $\dim(F+G) = \dim E$, donc $F + G = E$.
- (i) et $(iii) \implies (ii)$ D'après la formule de Grassmann, $\dim(F \cap G) = 0$, soit $F \cap G = \{0_E\}$.
- (ii) et $(iii) \implies (i)$ Claire d'après la formule de Grassmann.

∎

Exemple 36 $F = \mathrm{Vect}((0,1,0))$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = 0\right\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 37 Les ensembles $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

3 Rang

3.1 Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire

Définition-théorème 38 – Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de dimension quelconque) et $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E. On appelle *rang de la famille* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, noté $\mathrm{rg}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, la dimension (nécessairement finie) du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
On a toujours $\mathrm{rg}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \leqslant n$, avec égalité si et seulement si la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

Démonstration. Engendré par un nombre fini de vecteurs, $\mathrm{Vect}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Or la dimension est toujours inférieure au nombre d'éléments de n'importe quelle partie génératrice (théorème 15), ainsi

$$\mathrm{rg}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = \dim \mathrm{Vect}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \leqslant n.$$

Pour le cas d'égalité, le théorème 18 affirme qu'en dimension n, une famille de n vecteurs est libre si et seulement si elle est génératrice. ∎

Le rang d'une famille finie de vecteurs est le plus grand nombre de vecteurs linéairement indépendant qu'elle contient (conséquence du théorème de la base extraite). En particulier, si la famille de vecteurs $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ contient r vecteurs linéairement indépendants, alors $\mathrm{rg}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \geqslant r$.

Exemple 39 $\mathrm{rg}((1,1,0),(0,0,1)) = 2$, $\mathrm{rg}((1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)) = 2$ et $\mathrm{rg}(X, 2X, -X) = 1$.

Définition 40 – Application linéaire de rang fini, rang

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (de dimension quelconque) et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- L'application linéaire f est dite de *rang fini* lorsque $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension finie, et de *rang infini* sinon.
- Si f est de rang fini, on appelle *rang de* f, noté $\mathrm{rg}\, f$, la dimension de $\mathrm{Im}\, f$.

Les notions de rang d'une famille de vecteurs et de rang d'une application linéaire ne sont heureusement pas sans rapport. Dans le cas où E est de dimension finie non nulle et admet $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ pour base, f est nécessairement de rang fini et

$$\mathrm{rg}\, f = \dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim\big(\mathrm{Vect}(f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}\big) = \mathrm{rg}(f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n},$$

en particulier $\mathrm{rg}\, f \leqslant \dim E$ et une application linéaire ne peut donc que « contracter » son espace de départ. Cette inégalité sera précisée par la formule du rang qui est l'objet de la section suivante.

Remarque 41 Si F est de dimension finie, le rang de toute application linéaire f de E dans F est fini et inférieur ou égal à $\dim F$, avec égalité si et seulement si f est surjective.

Théorème 42 – Rang *vs* composition

Soit E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, ainsi que $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

(i) Majoration du rang d'une composée. $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min\{\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g\}$.

(ii) Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

- Si g est un isomorphisme de F sur G, alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$.
- Si f est un isomorphisme de E sur F, alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$.

Démonstration. ... ■

3.2 Théorème du rang

Théorème 43 – Forme géométrique du théorème du rang

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (de dimension quelconque) et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Si $\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire S dans E, alors f induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} f$.

Démonstration. ... ■

Théorème 44 – Théorème (ou Formule) du rang

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Si E est DE DIMENSION FINIE, alors

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg}(f).$$

En particulier, $\operatorname{rg} f \leqslant \dim E$.

Démonstration. ... ■

Le théorème du rang indique que Si je connais le noyau, je connais un peu l'image et vice versa.

Notons que l'hypothèse « E est de dimension finie » garantit en particulier que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont aussi.

Exemple 45 Soit $f : (x,y,z) \longmapsto (x+2y-z, 2x-y+8z, x+y+z)$ un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$.
Alors $((3,-2,-1))$ et $((1,2,1),(2,-1,1))$ sont des bases respectives de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exemple 46 Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$. Alors $\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Exemple 47 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Si $f^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg}\left(f^2\right) \leqslant \dim E.$$

Théorème 48 – Caractérisation des isomorphismes/automorphismes en dimension finie

(i) Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de MÊME DIMENSION FINIE et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ injective}.$$

En particulier, ces équivalences valent pour un endomorphisme en dimension FINIE.

(ii) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de DIMENSION FINIE et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors

$$f \in \mathrm{GL}(E) \iff \underset{i.e.\quad \exists g \in \mathscr{L}(E),\quad g\circ f = \mathrm{Id}_E}{f \text{ est inversible à gauche dans } \mathscr{L}(E)} \iff \underset{i.e.\quad \exists g \in \mathscr{L}(E),\quad f\circ g = \mathrm{Id}_E}{f \text{ est inversible à droite dans } \mathscr{L}(E)}$$

Démonstration. ... ■

✖ **Attention !** ✖ Le théorème précédent ne dit pas que « bijectif = injectif = surjectif » en algèbre linéaire ! Il affirme seulement que ces propriétés se confondent lorsque les espaces vectoriels de départ et d'arrivée ont même dimension finie.

Exemple 49 L'application $(x,y,z) \overset{\varphi}{\longmapsto} (x+y,-x+y,z)$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^3$.

✖ **Attention !** ✖ Si le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E n'est pas de dimension finie :

- un endomorphisme de E peut être injectif sans être surjectif, *e.g.* l'application $P \longmapsto XP$ sur $\mathbb{K}[X]$;
- un endomorphisme de E peut être surjectif sans être injectif, *e.g.* la dérivation $P \longmapsto P'$ sur $\mathbb{K}[X]$.

4 Formes linéaires et hyperplans

Exemple 50 – Formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K})$ une forme linéaire et $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. En posant $a_i = \varphi(e_i)$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a, pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\varphi((x_1,\dots,x_n)) = \varphi(x_1e_1+\dots+x_ne_n) = x_1\varphi(e_1)+\dots+x_n\varphi(e_n) = a_1x_1+\dots+a_nx_n.$$

Ainsi φ est l'application $(x_1,\dots,x_n) \longmapsto a_1x_1+\dots+a_nx_n$ et il s'agit là de l'archétype d'une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.

Nous allons voir que cette description des formes linéaires se généralise en dimension finie via la notion de formes coordonnées relativement à une base.

Définition-théorème 51 – Formes coordonnées relativement à une base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que E possède une base $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$.
Pour tout $i \in I$, l'application qui associe à tout vecteur de E sa coordonnée dans $\mathscr{B}$ selon le vecteur e_i est une forme linéaire sur E appelée la i^e *forme coordonnée de E (dans $\mathscr{B}$)*, notée $e_i^\star$.
Il s'agit de l'unique forme linéaire définie sur E par $e_i^\star(e_j) = \delta_{i,j}$, pour tout $j \in I$.

Démonstration. ... ■

Exemple 52

- Les formes coordonnées de $\mathbb{K}^3$ pour sa base canonique sont les applications
$$(x,y,z) \longmapsto x, \qquad (x,y,z) \longmapsto y \qquad \text{et} \qquad (x,y,z) \longmapsto z.$$
- Pour tout $r \in \mathbb{N}$, la r^e formes coordonnées de $\mathbb{K}[X]$ pour sa base canonique est l'application $\sum_{k=0}^{+\infty} a_kX^k \longmapsto a_r$.

Théorème 53 – Base des formes coordonnées en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E. La famille $(e_i^\star)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des formes coordonnées associée à la base $\mathscr{B}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires de E.

Démonstration. ... ■

Ainsi, en dimension finie, les formes linéaires se résument à des combinaisons linéaires des formes coordonnées dans une base fixée de l'espace de départ.

Expression d'une forme linéaire dans une base. Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E et φ une forme linéaire sur E. Posons, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = \varphi(e_i)$, alors, pour tout vecteur x de E de coordonnées $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$,

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i\varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n a_ix_i,$$

autrement dit $\varphi = \sum_{i=1}^n a_ie_i^\star$ et φ envoie tout vecteur de E sur une certaine combinaison linéaire de ses coordonnées, toujours avec les mêmes coefficients – qui dépendent tout de même de la base choisie pour l'espace de départ !

Exemple 54 Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{K}_n[X]$. En posant $\varphi_k = \varphi\big(X^k\big)$, pour tout $k \in [\![0\,,n]\!]$, φ est l'application

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \varphi_k a_k.$$

Par exemple, la forme linéaire d'évaluation $P \longmapsto P(2)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est l'application

$$a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \longmapsto 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0.$$

Définition 55 – Hyperplan (affine)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- On appelle *hyperplan de E* tout noyau d'une forme linéaire NON NULLE de E.
- On appelle *hyperplan affine de E* tout sous-espace affine de E dont la direction est un hyperplan de E.

Le noyau de la forme linéaire nulle $x \longmapsto 0$ de E est l'espace E tout entier. On précise donc « non nulle » dans la définition pour éviter que E lui-même soit un hyperplan. En particulier, d'après ce qui vient d'être dit au sujet des formes linéaires en dimension finie,

En dimension finie :	Hyperplan	=	Ensemble d'écrit par une équation linéaire non nulle sur les coordonnées dans une base fixée.

Exemple 56

- Le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x + y - z = 0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, en tant que noyau de la forme linéaire non nulle $(x, y, z) \longmapsto 2x + y - z$.
- L'ensmble $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(1) + P(0) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$, en tant que noyau de la forme linéaire non nulle $P \longmapsto P'(1)+P(0)$. Par ailleurs, en introduisant a, b, c, d les coefficients de P : $P = aX^3+bX^2+cX+d$, H est décrit par l'équation $3a + 2b + c + d = 0$.
- L'ensemble $\{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(0) = f(0)\}$ est un hyperplan de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, en tant que noyau de la forme linéaire non nulle $f \longmapsto f(0) - f'(0)$.

Théorème 57 – Caractérisation géométrique des hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) H est un hyperplan de E. **(ii)** H est supplémentaire d'une droite de E.

En particulier, si E est de dimension finie non nulle, les hyperplans de E sont exactement ses sous-espaces vectoriels de dimension $\dim E - 1$.

Démonstration. ... ■

Exemple 58

- En dimension 3, les hyperplans sont les sous-espaces de dimension 2, *i.e.* les plans vectoriels, ce qui explique l'origine de la terminologie.
- En dimension 2, les hyperplans sont les sous-espaces de dimension 1, *i.e.* les droites vectorielles.

Exemple 59

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour une simple raison de dimension, $\mathbb{K}_n[X]$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$ et $\mathbb{K}^n \times \{0\}$ un hyperplan de $\mathbb{K}^{n+1}$. On pourrait aussi remarquer que $\mathbb{K}^n \times \{0\}$ est le noyau de la forme linéaire non nulle $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1} \longmapsto x_{n+1}$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.
- L'ensemble $\big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\big|\; 2x + y = z + t\big\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$, *i.e.* un sous-espace vectoriel de dimension $4 - 1 = 3$, en tant que noyau de la forme linéaire non nulle $(x, y, z, t) \longmapsto 2x + y - z - t$.
- L'ensemble $\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(0) = P(1)\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_4[X]$, *i.e.* un sous-espace vectoriel de dimension $5 - 1 = 4$, en tant que noyau de la forme linéaire non nulle $P \longmapsto P(0) - P(1)$.

Remarque 60 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle.

- Tout sous-espace vectoriel F de E distinct de E est inclus dans un hyperplan. C'est clair si F est trivial. Sinon, on peut compléter une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et l'hyperplan $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ répond à la question, puisque $p < n$ par hypothèse.
- Si un sous-espace vectoriel F de E contient strictement un hyperplan de E, alors il est égal à E, dans la mesure où sa dimension est strictement supérieure à $n-1$ et donc égale à n.

Théorème 61 – Comparaison des équations d'un hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un hyperplan de E. Si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles de E dont H est le noyau, alors il existe un scalaire λ NON NUL tel que $\psi = \lambda\varphi$.

Démonstration. ... ■

Il n'existe donc essentiellement qu'une seule équation d'un hyperplan, toutes les équations étant proportionnelles entre elles. Ce résultat nous était déjà familier en géométrie : les plans d'équations respectives $x + y + 2z = 0$ et $2x + 2y + 4z = 0$ sont évidemment un seul et même plan et ce plan n'admet pas d'équation (cartésienne) fondamentalement différente.

Théorème 62 – Intersection d'hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle et $r \in [\![1, n]\!]$.

(i) L'intersection de r hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension AU MOINS $n - r$.

(ii) Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$ est l'intersection d'exactement r hyperplans de E.

Démonstration. ... ■

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, il est de notoriété publique qu'une équation cartésienne décrit un plan et que deux telles équations, pour peu qu'elles ne soient pas proportionnelles, décrivent une droite.

L'idée sous-jacente du théorème précédent est que dans un système linéaire chaque équation occasionne POTENTIELLEMENT la perte d'une dimension pour l'espace des solutions par rapport au nombre total d'inconnues. Pourquoi potentiellement ? Parce que certaines équations peuvent être redondante, *i.e.* combinaison linéaire des autres, et ne pas compter réellement. Par exemple, le système linéaire

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ décrit une droite et non un point de $\mathbb{R}^3$, car la troisième équation n'est autre que la somme des deux premières. De façon générale, un système linéaire homogène de r équations (les hyperplans) à n inconnues (les solutions vivent dans $E = \mathbb{K}^n$ de dimension n) a un espace de solutions de dimension supérieure ou égale à $n - r$, *i.e.* s'exprimant à l'aide d'au moins $n - r$ variables libres.

Compétences à acquérir

- Mise en œuvre de l'algorithme de la base incomplète : exercice 2.
- Déterminer la dimension d'un espace vectoriel : exercices 3 à 5, 10 et 12.
- Montrer qu'une famille est une base via un argument de dimension : exercices 6, 7, 11 et 48.
- Montrer que deux espaces vectoriels sont isomorphes : exercices 10 et 11.
- Calculer la dimension d'une somme : exercices 16, 17 et 53.
- Montrer que des sous-espaces vectoriels sont en somme directe/supplémentaires via un argument de dimension : exercices 18 et 19.
- Déterminer le rang d'une famille de vecteurs : exercices 20 à 22.
- Utiliser le théorème du rang : exercices 23 à 26, 32 à 35 et 45.

Quelques résultats classiques :

- Dimension des espaces de solutions des équations différentielles linéaires homogènes (exemples 12 et 13).
- Dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ (exemple 14).
- Existence d'un polynôme annulateur non trivial pour toute matrice carrée (exemple 16).
- Image de l'endomorphisme $P \longmapsto P(X+1) - P(X)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ (exemple 46).
- Preuve du théorème de structure pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (exercice 11).
- Polynômes laissant stable $\mathbb{Z}$ (exercices 13 et 14).
- L'inverse d'une matrice est un polynôme en cette matrice (exercice 25).
- Majoration de l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent (exercice 37).
- En dimension finie, les endomorphismes localement nilpotents sont nilpotents (exercice 37).
- « Inégalité triangulaire » pour le rang (exercice 38).
- Rang et composition (exercice 39 questions **1** et **2.a**).
- Noyaux itérés et décomposition de Fitting (exercices 45 et 46).
- Surjectivité des formes linéaires non nulles (exercice 47).