

Dans l'ensemble de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un ensemble non vide quelconque.[†] Après avoir introduit la structure d'espace vectoriel au chapitre 21, nous nous intéressons aux morphismes entre de tels espaces : les applications linéaires.

1 Généralités sur les applications linéaires

1.1 Définition

Les applications linéaires sont les morphismes d'espaces vectoriels.

Définition 1 – Application linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On appelle *application linéaire de E dans F* toute application $f : E \longrightarrow F$ qui préserve les combinaisons linéaires :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in E, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

- **Cas particulier où $E = F$.** Une application linéaire de E dans E est aussi appelée un *endomorphisme de E* . L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.
- **Cas particulier où $F = \mathbb{K}$.** Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est aussi appelée une *forme linéaire sur E* .

Remarque 2 Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- En particulier, f est un morphisme de groupes additifs de $(E, +)$ dans $(F, +)$. On a donc $f(0_E) = 0_F$.
- Si A est un sous-espace vectoriel de E , alors la restriction $f|_A$ est aussi linéaire sur A , i.e. un élément de $\mathcal{L}(A, F)$.
- Par récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n, \quad \forall (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n, \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Définition-théorème 3 – Homothétie

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $\lambda \text{Id}_E : x \longmapsto \lambda x$ est un endomorphisme de E , appelé *homothétie de E de rapport λ* . En particulier, $\text{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$.

Démonstration. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$, $(\lambda \text{Id}_E)(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha(\lambda \text{Id}_E)(x) + \beta(\lambda \text{Id}_E)(y)$. ■

Exemple 4

- Les endomorphismes du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}$ sont les homothéties $x \longmapsto ax$, où $a \in \mathbb{K}$.
En effet, si f est un endomorphisme de $\mathbb{K}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $f(x) = f(x \times 1) = xf(1)$, par linéarité de f .
- Pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$, l'application $(x, y) \longmapsto (ax + by, cx + dy)$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^2$.

Exemple 5

- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les applications $M \longmapsto AM$ et $M \longmapsto MA$ de multiplication par A sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (bilinéarité du produit matriciel – théorème 12 du chapitre 12).
- Pour tout intervalle I , l'application $f \longmapsto f'$ est linéaire de $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^I$ ou de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.
Il s'agit même d'un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.
- L'application $P \longmapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

[†]. Tous les résultats énoncés dans ce chapitre, à l'exception notable de ceux de la section 3 concernant les symétries, demeurent vrais sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque.

Exemple 6

- Pour tout $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, l'application $(x, y) \mapsto ax + by$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^2$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, l'application $P \mapsto P(\alpha)$ d'évaluation en α est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.
- La trace $A \mapsto \text{tr}(A)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, l'application $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.
- Si l'on note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des suites numériques convergentes, l'application $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}$.

Exemple 7

- L'application $(x, y) \mapsto x + y + 1$ n'est PAS linéaire de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}$, puisque $\varphi((0, 0)) = 1 \neq 0$.
- L'application $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ n'est PAS linéaire de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}$, puisque $\psi(2(1, 1)) = \psi((2, 2)) = 8 \neq 4 = 2\psi((1, 1))$.

Définition 8 – Isomorphisme, espaces vectoriels isomorphes

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

- On appelle *isomorphisme (d'espaces vectoriels) de E sur F* toute application linéaire bijective de E sur F .

Cas particulier où $E = F$. Un isomorphisme de E sur E est aussi appelé un *automorphisme (d'espace vectoriel) de E* . L'ensemble des automorphismes de E est noté $\text{GL}(E)$ et appelé le *groupe linéaire* de E .

- L'espace F est dit *isomorphe à E* lorsqu'il existe un isomorphisme de E sur F , ce que l'on note $F \simeq E$.

Le fait que deux espaces vectoriels soient isomorphes signifie intuitivement que ces deux espaces sont indiscernables du strict point de vue de leur structure vectoriel. Un isomorphisme est alors tel un dictionnaire parfait pour passer de l'un de ces espaces à l'autre. Toute propriété vectorielle, *i.e.* que l'on peut exprimer en termes de combinaisons linéaires, de l'un de ces espaces a son analogue dans l'autre espace.

Exemple 9 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'identité Id_E est un automorphisme de E . Plus généralement, toute homothétie de rapport λ NON NUL est un automorphisme de E .

Exemple 10 – Identification de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^n$

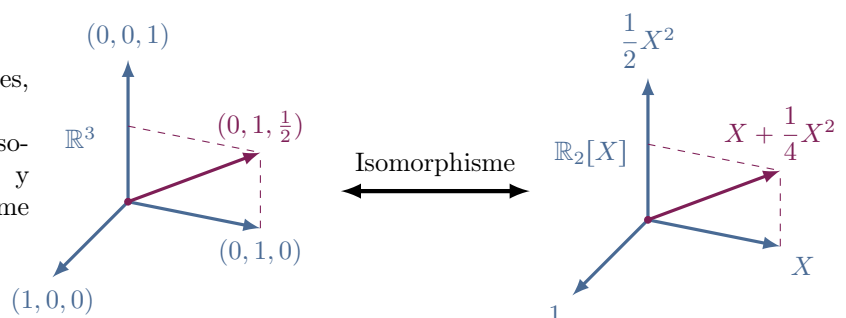
- La transposition $A \mapsto A^\top$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- En particulier, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est isomorphe $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, ce qui légitime l'identification de tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ avec une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et réciproquement.

Exemple 11 L'application $(x, y) \xrightarrow{f} (3x + y, 5x + 2y)$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^2$ et admet pour réciproque $(x, y) \mapsto (2x - y, -5x + 3y)$.

Exemple 12 L'application $f \xrightarrow{S} (f', f(0))$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.

Exemple 13 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $P \mapsto (P(0), P'(0), \dots, P^{(n)}(0))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$ de réciproque $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} X^k$ (formule de Taylor polynomiale en 0). (Ici $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.)

En particulier, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont isomorphes, *i.e.* « identiques » en tant qu'espaces vectoriels. La figure ci-contre illustre la manière dont cet isomorphisme « géométrise » l'espace $\mathbb{R}_2[X]$. On y associe à tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le polynôme $a + bX + \frac{c}{2}X^2$.



1.2 Opérations sur les applications linéaires

Théorème 14 – Espace vectoriel des applications linéaires

Soit E et F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Autrement dit, toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

Démonstration. ...

Exemple 15 Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $M \mapsto AM - MA$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En effet, les applications $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$ sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (cf. exemple 5), donc $\varphi = g - d$ aussi par différence.

Théorème 16 – Composition d'applications linéaires, réciproque d'un isomorphisme

Soit E, F et G des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

(i) Composition. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

En particulier, si f est un isomorphisme de E sur F et g un isomorphisme de F sur G , alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G .

(ii) Bilinéarité de la composition. Pour tous $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$, $u, f, f' \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v, g, g' \in \mathcal{L}(F, G)$,

$$v \circ (\lambda f + \lambda' f') = \lambda(v \circ f) + \lambda'(v \circ f') \quad \text{et} \quad (\lambda g + \lambda' g') \circ u = \lambda(g \circ u) + \lambda'(g' \circ u).$$

Autrement dit, pour tous $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, les applications suivantes sont linéaires :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ f & \longmapsto & v \circ f \end{array} \right| \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F, G) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ g & \longmapsto & g \circ u \end{array} \right|$$

(iii) Réciproque. Si f est un isomorphisme de E sur F , alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E .

Démonstration.

(i) Il suffit de vérifier la linéarité de $g \circ f$.

(ii) La première égalité est une conséquence de la linéarité de v , tandis que la seconde égalité est une simple conséquence de la définition de $\lambda g + \lambda' g'$.

(iii) Totalement analogues à celles données pour le théorème 51 du chapitre 11. On remplacera le produit inverse $y^{-1} *' y'$ par une combinaison linéaire de vecteurs de F .

Corollaire 17

La relation d'isomorphisme $\simeq$ est une relation d'équivalence sur tout ensemble de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

La propriété de symétrie d'une relation d'équivalence nous autorise alors à écrire « E et F sont isomorphes » en lieu et place de « F est isomorphe à E ».

Exemple 18 L'application $f \mapsto \int_0^1 f(t^2) dt$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

En effet, puisque $t \mapsto t^2$ est continue et à valeurs dans $[0, 1]$ sur $[0, 1]$, $\Phi : f \mapsto f \circ g$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Or $\Psi : f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$ est linéaire sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, par conséquent $\chi = \Psi \circ \Phi$ est aussi linéaire sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, par composition.

Théorème 19 – Anneau des endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- Le triplet $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (non commutatif et non intègre en général) avec $1_{\mathcal{L}(E)} = \text{Id}_E$.
- $\text{GL}(E)$ est le groupe des inversibles de l'anneau $\mathcal{L}(E)$.

On omet souvent de noter le symbole $\circ$ de composition en notant gf la composée $g \circ f$ de deux endomorphismes.

Démonstration. D'une part, $(\mathcal{L}(E), +)$ est un groupe abélien en tant que $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (théorème 14). D'autre part, la composition est une loi de composition interne sur $\mathcal{L}(E)$ (théorème 16.(i)). Cette loi est associative, admet l'endomorphisme Id_E pour élément neutre et est distributive par rapport à l'addition (théorème 16.(ii)).

La structure d'anneau de $\mathcal{L}(E)$ permet de considérer les puissances d'un endomorphisme et on dispose alors des règles de calcul classiques valables dans un anneau (théorèmes 18 et 59 du chapitre 11). On dispose en particulier des deux formules classiques

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k g^{n-k} \quad \text{et} \quad f^n - g^n = (f - g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-k-1},$$

pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E)$ qui COMMUTENT. On notera bien que la loi produit de l'anneau $\mathcal{L}(E)$ est la COMPOSITION. Ainsi, pour tous $f \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$, le k^{e} itéré f^k d'un endomorphisme est Id_E si $n = 0$ et $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$ sinon.

Exemple 20 Les endomorphismes $\Delta : P \mapsto P'$ et $M : P \mapsto XP$ de $\mathbb{K}[X]$ ne commutent pas. Ainsi l'anneau $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ n'est pas commutatif.

En effet, $\Delta \circ M(X) = (X^2)' = 2X$ et $M \circ \Delta(X) = X \times X' = X$.

Remarque 21 Les homothéties d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E commutent avec tous les endomorphismes de E .

Remarque 22 On dispose donc d'une structure de $\mathbb{K}$ -algèbre pour $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$.

Polynômes d'endomorphismes À l'instar des matrices, on peut considérer des polynômes d'endomorphisme. Précisément, pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, l'évaluation de P en f est définie par

$$P(f) = \sum_{k=0}^n a_k f^k = a_n f^n + \dots + a_1 f + a_0 \text{Id}_E.$$

En particulier, le polynôme P est appelé un *polynôme annulateur* de f lorsque $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exemple 23 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ défini par $f : (x, y) \mapsto (x + y, 2y)$, alors f^2 et f^3 sont les endomorphismes de $\mathbb{K}^2$ définis par

$$f^2 : (x, y) \mapsto f(f((x, y))) = f((x + y, 2y)) = (x + y + 2y, 2(2y)) = (x + 3y, 4y),$$

$$f^3 : (x, y) \mapsto f(f^2((x, y))) = f((x + 3y, 4y)) = (x + 3y + 4y, 2(4y)) = (x + 7y, 8y)$$

et $P = X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de f , puisque, pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$,

$$P(f)(x, y) = (f^2 - 3f + 2 \text{Id}_{\mathbb{K}^2})(x, y) = f^2(x, y) - 3f(x, y) + 2 \text{Id}_{\mathbb{K}^2}(x, y) = (x + 3y, 4y) - 3(x + y, 2y) + 2(x, y) = 0_{\mathbb{K}^2}.$$

Définition 24 – Endomorphisme nilpotent

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un endomorphisme f de E est dit *nilpotent* lorsqu'il existe un entier naturel k non nul tel que $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Le cas échéant, le plus petit de ces entiers k est appelé l'*indice de nilpotence* de f .

Exemple 25 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme $\Delta : P \mapsto P'$ de $\mathbb{K}_n[X]$ est nilpotent d'indice $n + 1$.

1.3 Image et noyau d'une application linéaire

Théorème 26 – Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- (i) Si E' est un sous-espace vectoriel de E , alors l'image $f[E']$ de E' par f est un sous-espace vectoriel de F .
- (ii) Si F' est un sous-espace vectoriel de F , alors l'image réciproque $f^{-1}[F']$ de F' par f est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. ...

Définition-théorème 27 – Image et noyau d’une application linéaire, caractérisation de l’injectivité

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- **Image.** On appelle *image de f* le sous-espace vectoriel $\text{Im } f = f[E]$ de F , sur lequel on peut lire la surjectivité de f :

$$f \text{ est surjective de } E \text{ sur } F \iff \text{Im } f = F.$$

- **Noyau.** On appelle *noyau de f* et on note $\text{Ker } f$ l’ensemble :

$$\text{Ker } f = f^{-1}[\{0_F\}] = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

Il s’agit là d’un sous-espace vectoriel de E , qui permet notamment de caractériser l’injectivité de f :

$$f \text{ est injective sur } E \iff \text{Ker } f = \{0_E\}.$$

Démonstration. La caractérisation de l’injectivité est clair dans la mesure où l’application linéaire f est en particulier un morphisme entre les groupes additifs $(E, +)$ et $(F, +)$ (théorème 47 du chapitre 11). ■

Le noyau de f n’est jamais que l’ensemble des solutions de l’équation linéaire homogène $f(x) = 0_F$, d’inconnue $x \in E$. D’une certaine manière, $\text{Ker } f$ est l’ensemble des éléments de E que f ne « voit » pas. En effet, pour tous $x \in E$ et $k \in \text{Ker } f$, $f(x + k) = f(x)$, par linéarité. Ainsi, $\text{Ker } f$ mesure le défaut d’injectivité de f .

En pratique En tant que sous-espace vectoriel de E , $\text{Ker } f$ contient 0_E . Ainsi, pour établir qu’une application LINÉAIRE f est injective, il suffit de montrer l’INCLUSION $\text{Ker } f \subset \{0_E\}$.

Remarque 28

- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout scalaire non nul $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on a $\text{Ker } f = \text{Ker}(\lambda f)$, égalité qui découle de l’équivalence

$$f(x) = 0_F \iff_{\lambda \neq 0} \lambda f(x) = 0_F.$$

- Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A un sous-espace vectoriel de E . Alors

$$\text{Ker } f|_A = A \cap \text{Ker } f.$$

Théorème 29 – Propriétés des noyaux et des images

- (i) Pour tous $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$,
- *Composée nulle.* $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g$.
 - *Gonflement des noyaux.* $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g \circ f$.
 - *Réduction des images.* $\text{Im } g \circ f \subset \text{Im } g$.
- (ii) Pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E)$, si v commute avec u , alors $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont v -stables.

Démonstration. ... ■

Remarque 30 Les propriétés énoncées au théorème précédent sont valables plus généralement pour des morphismes de groupes. La propriété de réduction des images est même valable pour des applications quelconques !

Exemple 31 L’image de l’endomorphisme $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z)$ de $\mathbb{K}^3$ est le plan d’équation $z = x$. En particulier, $\text{Im } g \neq \mathbb{K}^3$ et g n’est pas surjectif.

Exemple 32 Soit f l’application linéaire $(x, y, z) \mapsto (2x + y - z, x - y)$ de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^2$. Alors $\text{Ker } f = \text{Vect}((1, 1, 3))$ et en particulier f n’est pas injective.

Exemple 33 L’endomorphisme $f \mapsto f \times \sin$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n’est PAS injectif, mais sa restriction $S|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ l’est.

Exemple 34 Les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. (Ici on suppose $2 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$.)

En effet, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\Theta - \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\Theta + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})})$, où $\Theta : A \mapsto A^\top$ est l’automorphisme involutif de transposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 35 – Image d'un Vect par une application linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour toute partie X de E , $f[\text{Vect}(X)] = \text{Vect}(f[X])$.

Démonstration. ...

Exemple 36 La dérivation polynomiale $P \mapsto P'$ sur $\mathbb{K}[X]$ a pour noyau $\text{Ker } \Delta = \mathbb{K}_0[X]$ et en particulier n'est pas injective. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta[\mathbb{K}_n[X]] = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. (Ici $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.)

Corollaire 37 – Image d'une famille génératrice par une application linéaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E , alors $\text{Im } u = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$, autrement dit $(u(x_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de $\text{Im } u$.

Démonstration. Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E , alors

$$\text{Im } u = u[E] = u[\text{Vect}(x_i)_{i \in I}] \stackrel{\text{Th.35}}{=} \text{Vect}(u((x_i)_{i \in I})) = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}.$$

Exemple 38 On note f l'application linéaire $(x, y) \mapsto (2x + y, 3x + 5y, y)$ de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}^3$. Alors $((2, 3, 0), (1, 5, 1))$ est une famille génératrice de $\text{Im } f$.

Corollaire 39 – Image d'une somme de sous-espaces vectoriels

Si u est une application linéaire de E dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E' et si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors

$$u[F + G] = u[F] + u[G].$$

Démonstration. Par définitions,

$$u[F + G] = u[\text{Vect}(F \cup G)] \stackrel{\text{Th.35}}{=} \text{Vect}(u[F \cup G]) = \text{Vect}(u[F] \cup u[G]) = u[F] + u[G].$$

1.4 Rigidité des applications linéaires

Pour connaître une application en général, on n'a d'autre choix que de connaître l'ensemble de ses valeurs point par point. Pour une application linéaire en revanche, ce lot considérable d'informations peut être résumé par un nombre restreint de valeurs stratégiques.

Exemple 40 On connaît parfaitement l'application $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, 3x - z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ si l'on sait qu'elle est LINÉAIRE et si l'on sait que $f((1, 0, 0)) = (2, 3)$, $f((0, 1, 0)) = (1, 0)$ et $f((0, 0, 1)) = (1, -1)$.

En effet, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f((x, y, z)) &= f(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) \stackrel{(\text{Linéarité})}{=} xf((1, 0, 0)) + yf((0, 1, 0)) + zf((0, 0, 1)) \dots \\ &\dots = x(2, 3) + y(1, 0) + z(1, -1) = (2x + y + z, 3x - z). \end{aligned}$$

Le théorème fondamental suivant généralise ce principe de rigidité pour les applications linéaires.

Théorème 41 – Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base (rigidité)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Si E possède une base $(e_i)_{i \in I}$, alors, pour toute famille $(f_i)_{i \in I}$ de F , il existe une et une seule application linéaire u de E dans F telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.

Démonstration. ...

Pour connaître/définir une application LINÉAIRE complètement, il suffit de connaître/définir les valeurs qu'elle prend sur une base de l'espace de départ.

 **En pratique**  Pour établir que deux applications linéaires sont égales, il suffit de vérifier qu'elles coïncident sur une base de l'espace de départ.

Dans la mesure où une application linéaire est entièrement caractérisée par les valeurs qu'elle prend sur une base, nous pouvons en tirer une nouvelle caractérisation naturelle de l'injectivité et de la surjectivité.

Théorème 42 – Caractérisation de l'injectivité/surjectivité d'une app. linéaire par l'image d'une base

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E possède une base $(e_i)_{i \in I}$.

- (i) u est surjective de E sur F si et seulement si $(u(e_i))_{i \in I}$ engendre F .
- (ii) u est injective sur E si et seulement si $(u(e_i))_{i \in I}$ est libre.
- (iii) u est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $(u(e_i))_{i \in I}$ est une base de F .

Démonstration. ...

Exemple 43 Pour tous $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts, l'application $P \mapsto (P(x_i))_{0 \leq i \leq n}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.

En effet, cette application linéaire transforme la base $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ des polynômes de Lagrange associés aux points $x_0, \dots, x_n$ en la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$, dans la mesure où $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, pour tous $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Le résultat suivant, analogue au théorème 41, est une autre façon d'exprimer le principe de rigidité pour les applications linéaires, ces dernières étant uniquement déterminées par leurs restrictions à deux sous-espaces supplémentaires.

Théorème 44 – Détermination d'une application linéaire sur une somme directe (rigidité)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Il existe alors une et une seule application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.

Démonstration. ...

Ainsi, tout élément de $\mathcal{L}(E, F)$ est une sorte de recollement d'un élément de $\mathcal{L}(E_1, F)$ et d'un élément de $\mathcal{L}(E_2, F)$.

2 Équations linéaires

Dans l'ensemble de cette section, E et F désignent des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Définition 45 – Équation linéaire

Une *équation linéaire* est une équation de la forme $u(x) = b$, où

- u est une application linéaire d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel F ;
- b est un vecteur de F , appelé le *second membre* de l'équation linéaire;
- l'inconnue x est dans E .

Exercice 46 Nous avons déjà rencontré un certain nombre d'équations linéaires.

- Un système linéaire de n équations à p inconnues

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,p} x_p = b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,p} x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,p} x_p = b_n, \end{cases}$$

où $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des familles d'éléments de $\mathbb{K}$ et l'inconnue le vecteur $(x_1, \dots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$.

L'application linéaire sous-jacente est $X \mapsto AX$ de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.

- Une équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' + a(t)y = b(t),$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I et où l'inconnue est le vecteur y de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. L'application linéaire sous-jacente est $y \mapsto y' + ay$ de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

Il en va de même pour une équation différentielle linéaire du second ordre $ay'' + by' + cy = d(t)$, où $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $d \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, et où l'inconnue est le vecteur y de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

- Les suites récurrentes linéaire du second ordre satisfont les équations linéaires de la forme

$$a(u_{n+2})_{n \in \mathbb{N}} + b(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} + c(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (d_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

où $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et où l'inconnue est le vecteur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. L'application linéaire sous-jacente est

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Théorème 47 – Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. On dispose de l'alternative suivante :

- Si $b \notin \text{Im } u$, l'équation linéaire $u(x) = b$ d'inconnue $x \in E$ est sans solution, elle est dite *incompatible*.
- Si $b \in \text{Im } u$, l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $u(x) = b$ d'inconnue $x \in E$ est un sous-espace affine de E de direction $\text{Ker } u$.

Notons que $\text{Ker } u$ est l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène associée $u(x) = 0_F$, il est en particulier non vide.

Démonstration. Dans le cas où $b \in \text{Im } u$, il existe $x_0 \in E$ tel que $b = u(x_0)$. Alors, pour tout $x \in E$, sachant u linéaire, on dispose des équivalences

$$u(x) = b \iff u(x) = u(x_0) \iff u(x - x_0) = 0_F \iff x - x_0 \in \text{Ker } u \iff x \in x_0 + \text{Ker } u.$$

Le théorème précédent est la formalisation du principe suivant rencontré dès le chapitre 8 lors de l'étude des équations différentielles linéaires :

Solution générale de l'équation complète	=	Solution particulière	+	Solution générale de l'équation homogène
---	---	-----------------------	---	---

Le corollaire suivant n'est qu'un cas particulier du théorème précédent.

Corollaire 48 – Ensemble des solutions d'un système linéaire

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$.

- L'ensemble des solutions du système linéaire HOMOGÈNE $AX = 0$, d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

En particulier, toute droite de $\mathbb{R}^2$ PASSANT PAR $(0,0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, et toute droite et tout plan de $\mathbb{R}^3$ PASSANT PAR $(0,0,0)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

- Si le système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$ est COMPATIBLE, alors l'ensemble de ses solutions est sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ dirigé par l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé.

En particulier, toute droite de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$, et toute droite et tout plan de $\mathbb{R}^3$ sont des sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 49 L'ensemble des solutions du système linéaire $\begin{cases} 5x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$ est la droite affine de direction $\text{Vect}((1, -2, 3))$ passant par le point $(0, 1, -1)$.

En effet, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} 5x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x + y - z = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{3}(L_1 + L_2) \iff \begin{cases} y = 1 - 2x \\ z = 3x - 1 \end{cases}$$

ainsi l'ensemble des solutions est

$$\{(x, 1 - 2x, 3x - 1) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(0, 1, -1) + x(1, -2, 3) \mid x \in \mathbb{R}\} = (0, 1, -1) + \text{Vect}((1, -2, 3)).$$

Exercice 50 – Solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ou du second ordre

- Soit I un intervalle, $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et A une primitive de a sur I .
 - × L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène $y' + a(t)y = 0$ est le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\exp(-A))$ (théorème 5 du chapitre 8).
 - × La méthode de variation de la constante garantit l'existence d'une solution particulière y_{part} à l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$, dont l'ensemble des solutions est le sous-espace affine $y_{\text{part}} + \text{Vect}(\exp(-A))$.

- Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre $ay'' + by' + cy = 0$ et $P = aX^2 + bX + c$. Le théorème 19 du chapitre 8 énonce que
 - × Si P possède deux racines réelles distinctes r et s , alors $F = \text{Vect}(t \mapsto e^{rt}, t \mapsto e^{st})$.
 - × Si P possède une racine double réelle r , alors $F = \text{Vect}(t \mapsto e^{rt}, t \mapsto te^{rt})$.
 - × Si P possède deux racines complexes conjuguées $r \pm i\omega$ alors $F = \text{Vect}(t \mapsto e^{rt} \sin(\omega t), t \mapsto e^{rt} \cos(\omega t))$.

Exemple 51 – Suites arithmético-géométriques Soit $a, b \in \mathbb{K}$. Considérons l'application linéaire

$$T_a : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow (u_{n+1} - au_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Les suites arithmétiques de raison b , géométriques de raison a et arithmético-géométriques de raison a et second membre b , avec $a, b \in \mathbb{K}$, sont les solutions respectives des équations linéaires suivantes d'inconnue $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

$$T_1(u) = (b)_{n \in \mathbb{N}}, \quad T_a(u) = 0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} \quad \text{et} \quad T_a(u) = (b)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Or, d'une part, l'ensemble des solutions de l'équation homogène $T_a(u) = 0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}$ est la droite vectorielle $\text{Vect}((a^n)_{n \in \mathbb{N}})$ et, d'autre part, l'équation $T_a(u) = (b)_{n \in \mathbb{N}}$ admet pour solution particulière

- la suite affine $(nb)_{n \in \mathbb{N}}$ si $a = 1$;
- la suite constante $(\ell)_{n \in \mathbb{N}}$ si $a \neq 1$, où ℓ est l'unique solution de l'équation $ax + b = x$.

Au total, les ensembles de solutions sont respectivement les sous-espaces affines

$$(nb)_{n \in \mathbb{N}} + \text{Vect}(1), \quad \text{Vect}((a^n)_{n \in \mathbb{N}}) \quad \text{et} \quad (\ell)_{n \in \mathbb{N}} + \text{Vect}((a^n)_{n \in \mathbb{N}}),$$

et correspondent naturellement aux expressions des termes généraux des suites étudiées.

3 Projecteurs et symétries

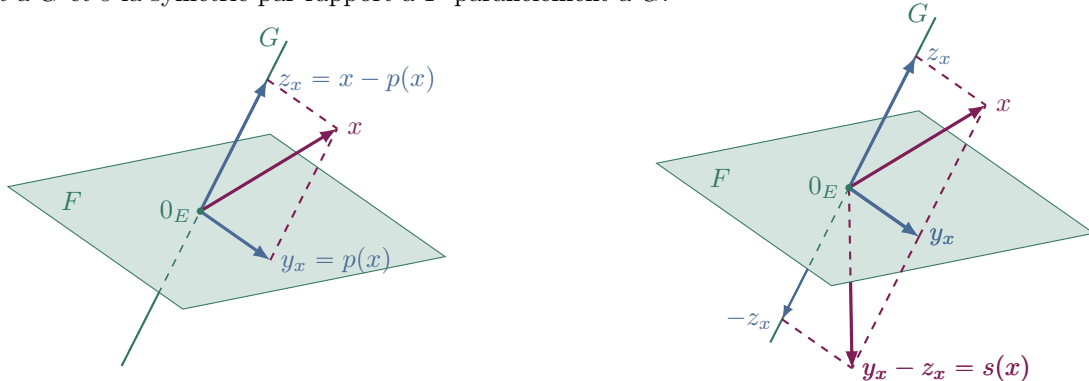
Dans l'ensemble de cette section, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition 52 – Projecteur et symétrie

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels SUPPLÉMENTAIRES du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Pour tout $x \in E$, notons (y_x, z_x) l'unique couple de $F \times G$ tel que $x = y_x + z_x$. Avec ces notations,

- l'application de E dans E qui à x associe y_x est appelée la *projection sur F parallèlement à G* ou encore le *projecteur sur F de direction G* ;
- l'application de E dans E qui à x associe $y_x - z_x$ est appelée la *symétrie par rapport à F parallèlement à G* ou encore la *symétrie par rapport à F de direction G* .

Ces deux définitions se conçoivent aisément via les deux figures suivantes, où l'on note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G .



Exemple 53 La projection de l'espace $\mathbb{R}^3$ sur le plan $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ parallèlement à la droite $G = \text{Vect}(1, 1, 1)$ est l'application linéaire $(x, y, z) \mapsto \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)$.

Théorème 54 – Propriétés des projecteurs et des symétries

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

(i) **Propriétés des projecteurs.** p est un endomorphisme de E vérifiant $p^2 = p$ ainsi que

$$F = \text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{Id}_E) = \{x \in E \mid p(x) = x\} \quad \text{et} \quad G = \text{Ker } p.$$

Autrement dit, $F = \text{Im } p$ est l'espace des vecteurs invariants par p .

(ii) **Propriétés des symétries.** s est un endomorphisme de E vérifiant $s^2 = \text{Id}_E$ (involution de E) ainsi que

$$F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = x\} \quad \text{et} \quad G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = -x\}.$$

Démonstration. ...

Remarque 55 En lien avec les théorèmes de rigidité,

- la projection sur F parallèlement à G est l'unique endomorphisme p de E tel que $p|_F = \text{Id}_F$ et $p|_G = 0_{\mathcal{L}(G)}$;
- la symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'unique endomorphisme s de E tel que $s|_F = \text{Id}_F$ et $s|_G = -\text{Id}_G$.

Théorème 56 – Caractérisation algébrique des projecteurs/symétries

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u un ENDOMORPHISME de E .

(i) u est un projecteur de E si et seulement si $u^2 = u$. Le cas échéant, $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont supplémentaires dans E et u est la projection sur $\text{Im } u$ parallèlement à $\text{Ker } u$. Concrètement, pour tout $x \in E$,

$$x = \underbrace{u(x)}_{\in \text{Im } u} + \underbrace{x - u(x)}_{\in \text{Ker } u}.$$

(ii) u est une symétrie de E si et seulement si $u^2 = \text{Id}_E$. Le cas échéant, $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(u + \text{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E et u est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(u + \text{Id}_E)$. Concrètement, pour tout $x \in E$,

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}(x + u(x))}_{\in \text{Ker}(u - \text{Id}_E)} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - u(x))}_{\in \text{Ker}(u + \text{Id}_E)}.$$

Démonstration. ...

Ainsi un endomorphisme est un projecteur (resp. une symétrie) si et seulement s'il est annulé par le polynôme $X^2 - X$ (resp. $X^2 - 1$).

✗ ATTENTION ! ✗ Il ne faut pas omettre de mentionner/vérifier la linéarité de u avant d'utiliser l'une des caractérisations précédentes.

Exemple 57 L'application σ qui associe à toute fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ la fonction $x \mapsto f(-x)$ est une symétrie de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, en l'occurrence par rapport à l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions paires parallèlement à l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions impaires. En particulier, on a donc $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

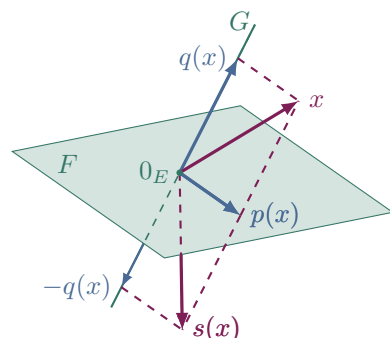
En effet, la linéarité et l'involutivité de σ sont claires, ainsi σ est une symétrie par rapport à $\text{Ker}(\sigma - \text{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}) = \mathcal{P}$ parallèlement à $\text{Ker}(\sigma + \text{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}) = \mathcal{I}$.

Théorème 58 – Lien projecteur/symétrie

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Si p (resp. q) désigne la projection sur F (resp. G) parallèlement à G (resp. F) et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G , alors

$$p + q = \text{Id}_E, \quad p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad p = \frac{s + \text{Id}_E}{2}.$$

Démonstration. Exercice. Tout est dans la figure ci-contre!



Compétences à acquérir

- Vérifier si une application est linéaire : exercice 1 à 6.
- Déterminer le noyau/l'image d'une application linéaire : exercices 1 et 6.
- Vérifier si une application linéaire est injective/surjective/bijjective : exercices 1, 3, 5, 6 et 10.
- Calculer dans l'anneau des endomorphismes : exercices 12 à 19.
- Déterminer l'expression d'un projecteur/d'une symétrie : exercice 23.
- Caractériser géométriquement un projecteur/une symétrie : exercices 23 à 30.

Quelques résultats classiques :

- Les homothéties sont les endomorphismes laissant toutes les droites stables (exercice 20).