21 Espaces vectoriels

Dans l'ensemble de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un ensemble non vide quelconque.[†] Nous complétons notre étude des structures algébriques débutée au chapitre 11 avec la présentation de la structure fondamentale d'espace vectoriel, sur laquelle est basée l'algèbre linéaire (étude des applications linéaires).

1 Espaces vectoriels et combinaisons linéaires

1.1 Structure d'espace vectoriel

Définition 1 – Espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un ensemble muni d'une loi de composition interne, notée $+$ et appelée *loi d'addition*, et d'une *loi externe*, notée $\cdot$ et appelée *loi de multiplication externe par un scalaire*, *i.e.* une application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda\cdot x. \end{array}$$

On dit que le triplet $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel*, ou un *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$, lorsque

- $(E, +)$ est un groupe abélien ;
- pour tous $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

  (i) (*associativité mixte*) $\lambda\cdot(\mu\cdot x) = (\lambda\mu)\cdot x$;
  (ii) (*distributivité mixte 1*) $\lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x + \lambda\cdot y$;
  (iii) (*neutralité mixte*) $1\cdot x = x$;
  (iv) (*distributivité mixte 2*) $(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x + \mu\cdot x$.

Les éléments de E sont appelés des *vecteurs* et ceux de $\mathbb{K}$ des *scalaires*, ces derniers agissant sur les vecteurs par l'intermédiaire de la loi externe.

La structure d'espace vectoriel, qui peut sembler hermétique au premier abord, est omniprésente en mathématiques. En mener l'étude systématique s'impose donc.

On peut évidemment s'interroger sur l'origine de la terminologie d'« *espace vectoriel* » et de « *vecteurs* » dans un cadre aussi abstrait. La réponse étant que les règles de la définition précédentes sont exactement celles classiquement vérifiées par les vecteurs usuels du plan et de l'espace. Dorénavant, les vecteurs pourront désigner des objets aussi divers que des matrices, des polynômes, des fonctions ou des suites, que l'on pourra ainsi s'efforcer de visualiser géométriquement.

Remarque 2

- Un espace vectoriel E est nécessairement non vide, puisqu'il contient toujours le vecteur nul 0_E (élément neutre de la loi additive du groupe abélien $(E, +)$).
- On écrit la plupart du temps « λx » en lieu et place de « $\lambda\cdot x$ », pour $\lambda\in\mathbb{K}$ et $x\in E$. Conventionnellement, on écrit le scalaire à gauche et le vecteur à droite.
- En géométrie, il est d'usage de noter les vecteurs $\vec{x}$ avec une flèche. En revanche, on utilise usuellement la notation plus légère sans flèche pour les vecteurs d'un espace vectoriel quelconque. Il faudra donc être vigilant et veiller à ne pas confondre vecteurs et scalaires au sein d'une même expression.

Théorème 3 – Règles de calcul dans un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(i) Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\quad \lambda\cdot x = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.
(ii) Pour tout $x\in E$, $\quad (-1)\cdot x = -x$, $\quad$ où $-x$ est l'opposé de x dans E et -1 l'opposé de 1 dans $\mathbb{K}$.

Démonstration. ... ■

✖ **Attention !** ✖ On veillera à ne pas confondre 0_E l'élément nul de l'espace vectoriel E avec 0 l'élément nul de l'ensemble des scalaires $\mathbb{K}$. L'élément 0_E est un vecteur tandis que 0 est un scalaire !

†. Tous les résultats énoncés dans ce chapitre demeurent vrais sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque.

Exemple 4 – $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ La structure de corps de $\mathbb{K}$ confère au triplet $(\mathbb{K}, +, \times)$ une structure d'espace vectoriel sur lui-même, la multiplication classique $\times$ dans $\mathbb{K}$ étant assimilée à la loi de multiplication externe par un scalaire « $\cdot$ ».

Les deux théorèmes suivants sont analogues à ceux énoncés au chapitre 11 pour les structures de groupe et d'anneau.

Théorème 5 – Espace vectoriel produit

Soit $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On munit $E_1 \times \dots \times E_n$ de deux lois $+$ et $\cdot$ en posant, pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n).$$

Alors $(E_1 \times \dots \times E_n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Notons que $0_{E_1 \times \dots \times E_n} = (0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

Démonstration. Simple vérification des axiomes de la définition. ■

Exemple 6 – Familles de scalaires En particulier, $\mathbb{K}^n = \overbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}^{n \text{ fois}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en vertu de l'exemple 4 et du théorème précédent.

On retrouve ici le cadre des vecteurs du plan avec $\mathbb{R}^2$ et celui des vecteurs de l'espace avec $\mathbb{R}^3$.
Par exemple, $(1, 4, -3) + 2 \cdot (0, 2, 5) = (1, 8, 7)$ – les opérations se faisant coordonnées par coordonnées.

Exemple 7 – Matrices Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour ses lois usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire.

En effet, il s'agit d'une reformulation du théorème 7 du chapitre 12.

Exemple 8 – Polynômes et fractions rationnelles $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}(X)$ sont des $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour leurs lois usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire.

En effet, il s'agit d'une simple vérification des axiomes de la définition.

Théorème 9 – Espace vectoriel de fonctions

Soit X un ensemble non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On munit l'ensemble E^X des fonctions de X dans E de deux lois $+$ et $\cdot$ en définissant, pour tous $f, g \in E^X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, les fonctions $f + g$ et $\lambda \cdot f$ par :

$$\forall x \in X, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot (f(x)).$$

Alors $\left(E^X, +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Notons que 0_{E^X} est la fonction nulle $x \longmapsto 0_E$ de X dans E.

Démonstration. Simple vérification des axiomes de la définition. ■

Exemple 10 – Fonctions et suites à valeurs dans $\mathbb{K}$

- Pour tout intervalle I non vide, l'ensemble $\mathbb{K}^I$ des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition des fonctions et leur multiplication par un scalaire (il s'agit du théorème précédent avec $X = I$ et $E = \mathbb{K}$).
- L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition des suites et leur multiplication par un scalaire (il s'agit du théorème précédent avec $X = \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{K}$).

Exemple 11 L'exemple 7 est un aussi un cas particulier du théorème précédent avec $X = [\![1\,,n]\!] \times [\![1\,,p]\!]$ et $E = \mathbb{K}$.

Exemple 12 Tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En particulier, $\mathbb{C}$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

En effet, si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\lambda \cdot x$ est défini pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in E$, donc en particulier pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui justifie que l'on puisse considérer E comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, par *restriction* de l'ensemble des scalaires.

1.2 Combinaisons linéaires

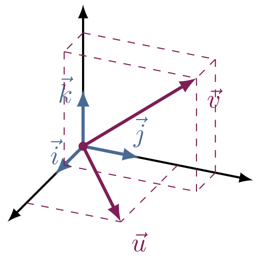
Définition 13 – Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A une partie de E et $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- On appelle *combinaison linéaire des vecteurs* $x_1, \dots, x_n$ tout vecteur de E de la forme $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont des scalaires, appelés les *coefficients* de la combinaison linéaire.
- On appelle *combinaison linéaire d'éléments de* A toute combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de A.

Les espaces vectoriels sont conçus pour pouvoir réaliser des combinaisons linéaires (mélanges d'additions et de multiplications par des scalaires).

Cette notion se conçoit géométriquement très simplement dans le plan ou l'espace. Sur la figure ci-contre, $\vec{u}$ est combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, mais ce n'est pas le cas de $\vec{v}$. Par contre, dans l'espace, tout vecteur est combinaison linéaire de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.



✖ Attention ! ✖ Péché d'identification.

En général : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k \quad \not\Longrightarrow \quad \lambda_k = \mu_k$, pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$.

Par exemple : $(1,1) + 2(0,1) + 2(1,0) = (3,3) = 2(1,1) + (0,1) + (1,0)$.
Nous reviendrons sur cette question au paragraphe 3.2.

Exemple 14 Dans $\mathbb{R}^2$, $(2,7)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(5,-2)$ et $(1,-3)$: $(2,7) = (5,-2) - 3(1,-3)$.

Exemple 15 Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 16 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, tout nombre complexe z est combinaison linéaire à coefficients réels des complexes 1 et i, puisque $z = \mathrm{Re}(z) \cdot 1 + \mathrm{Im}(z) \cdot i$.

Exemple 17 Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ est combinaison linéaire des polynômes $1, X, X^2, \dots, X^n$ puisque l'on peut l'écrire $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ pour certains $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

La notion suivante va nous permettre d'étendre la notion de combinaison linéaire à un nombre quelconque de vecteurs.

Définition 18 – Famille presque nulle de scalaires

Soit I un ensemble. Une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par I est dite *presque nulle* lorsque tous ses éléments sont nuls sauf éventuellement un nombre fini d'entre eux, *i.e.* lorsque l'ensemble $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ est fini.
On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I.

Dans le cas où l'ensemble d'indices I est fini, la précision « presque nulle » devient sans intérêt et on a $\mathbb{K}^I = \mathbb{K}^{(I)}$.

Définition 19 – Combinaison linéaire d'un nombre quelconque de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, I un ensemble quelconque et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.
On appelle *combinaison linéaire de la famille* $(x_i)_{i \in I}$ tout vecteur de E de la forme $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille PRESQUE NULLE d'éléments de $\mathbb{K}$.

Cette définition nous autorise donc à manipuler des combinaisons linéaires d'un nombre infini de vecteurs, en se limitant toutefois à des sommes ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls. La notion de sommes infinies n'a en effet aucun sens en l'absence d'une notion de limite adéquate à laquelle l'adosser.

Exemple 20 $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et la convention d'écriture des polynômes sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ désigne bien une somme ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 21 – Sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E STABLE PAR ADDITION ET PAR MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE. On dit que F est un *sous-espace vectoriel de* E lorsque F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois induites par celles de E.

Si F est sous-espace vectoriel de E, en particulier F est un sous-groupe additif de E et on a donc $0_F = 0_E$ (théorème 35 du chapitre 11).

Exemple 22 – Sous-espaces vectoriels triviaux Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E – parfois dits *triviaux*. Notamment $\{0_E\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel – parfois dit *trivial*.

Exemple 23 La partie $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+x+y^2=0\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

En effet, F n'est pas stable par multiplication par un scalaire, puisque $(-1,0) \in F$ tandis que $(-2,0) = 2(-1,0) \notin F$. Ni par addition d'ailleurs, puisque $(-2,0) = (-1,0) + (-1,0)$.

Théorème 24 – Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) F est un sous-espace vectoriel de E ;

(ii)
- $0_E \in F$;
- F est stable par combinaison linéaire : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in F, \quad \lambda x + \mu y \in F$.

Démonstration.

- **(i) $\Longrightarrow$ (ii).** Si F est un sous-espace vectoriel de E, on a rappelé que $0_E = 0_F \in F$. De plus, pour tous $x, y \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, λx et μy sont des éléments de F, partie stable de E par multiplication par un scalaire, et enfin $\lambda x + \mu y \in F$, car F est stable par addition.
- **(ii) $\Longrightarrow$ (i).** Si l'assertion **(ii)** est vraie, F est en particulier stable par addition (pour $\lambda = \mu = 1$) et multiplication par un scalaire (pour $y = 0_E$). En outre, pour tout $x \in F$, l'opposé $-x$ de x dans E appartient aussi à F (pour $\lambda = -1$ et $y = 0_E$). Les autres axiomes de la définition des espaces vectoriels ne requièrent aucune vérification particulière puisqu'une relation vraie sur E tout entier l'est aussi sur F. ∎

Exemple 25 La partie $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x - 3y = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

✎ En pratique ✎

- Pour établir qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel, on utilisera TOUJOURS la caractérisation précédente, qui évite de vérifier la ribambelle d'axiomes de la définition d'un espace vectoriel !
- Pour montrer qu'un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire est un espace vectoriel, il suffit souvent de montrer qu'il se réalise comme le SOUS-espace d'un autre espace vectoriel connu. D'où l'importance des espaces vectoriels classiques donnés en exemple précédemment (exemples et théorèmes 4 à 10).

Exemple 26 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

En effet, il s'agit bien d'un sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui contient la matrice nulle et nous avons déjà montré que toute combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) en est encore une (théorème 49 du chapitre 12).

Exemple 27 – Espaces vectoriels $\mathbb{K}_n[X]$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

✖ ATTENTION ! ✖ L'ensemble des polynômes de degré ÉGAL à n N'est PAS un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Il ne contient même pas le polynôme nul !

Exemple 28 L'ensemble des fractions rationnelles de degré strictement négatif à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}(X)$.

Exemple 29

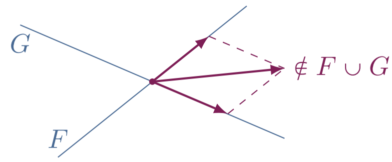
- Pour tout intervalle I non vide, les ensembles $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{K})$ et $\mathscr{D}^k(I,\mathbb{K})$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^I$ des applications de I dans $\mathbb{K}$.
- L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergentes est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Théorème 30 – Intersections de sous-espaces vectoriels

Toute intersection de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est encore un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. ... ∎

✖ **Attention !** ✖ En revanche, la réunion de deux sous-espaces vectoriels N'EST PAS un sous-espace vectoriel en général (cf. exercice 7).
La stabilité par addition n'est clairement pas assurée !



1.4 Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie

Définition-théorème 31 – Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie

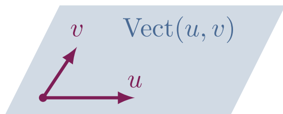
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X une partie de E.

(i) L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant X est appelé le *sous-espace vectoriel (de E) engendré par X* et est noté $\mathrm{Vect}(X)$. Il s'agit du plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X, *i.e.* $\mathrm{Vect}(X)$ contient X et tout sous-espace vectoriel de E qui contient X contient aussi $\mathrm{Vect}(X)$.

(ii) Si $X = \{x_i \mid i \in I\}$, alors $\mathrm{Vect}(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{i\in I}$ et est aussi noté $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Autrement dit

$$\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I} = \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \;\middle|\; (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\}.$$

Démonstration. ... ∎



✎ **En pratique** ✎ Pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel, il suffit souvent de l'écrire comme un Vect.

Exemple 32 Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}((1,2))$ est la droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $(0,0)$ et dirigée par $(1,2)$.

Exercice 33 Plus généralement, si a est un vecteur non nul d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, le sous-espace vectoriel engendré par a est $\{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$. On le note aussi $\mathbb{K}\,a$ et on l'appelle la *droite vectorielle engendrée par a*.

Exemple 34 Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, $\quad \mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$.

Exemple 35 $\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}\big(X^k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^n)$.

Exemple 36 Le théorème de décomposition en éléments simples des fractions rationnelles sur $\mathbb{C}$ énonce en particulier (partie « existence » du théorème) que

$$\mathbb{C}(X) = \mathrm{Vect}\left(\{X^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{ \frac{1}{(X-a)^n} \;\middle|\; a \in \mathbb{C} \text{ et } n \in \mathbb{N}^* \right\} \right).$$

Exemple 37 Le plan $\mathscr{P}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x - y + 3z = 0$ passe par le point $(0,0,0)$ et est dirigé par les vecteurs $(1,2,0)$ et $(0,3,1)$. En résumé : $\mathscr{P} = \mathrm{Vect}((1,2,0),(0,3,1))$.

Exemple 38 Le plan vectoriel $\mathscr{P} = \mathrm{Vect}((1,2,3),(2,1,-1))$ de $\mathbb{R}^3$ admet pour équation cartésienne $5x - 7y + 3z = 0$.

Exemple 39 Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, on a $\mathscr{T}_2^+(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)$.

Exemple 40 Si le corps de base est $\mathbb{R}$, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1) = \{a \times 1 \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1,i) = \{a \times 1 + b \times i \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$. En revanche, si le corps de base est $\mathbb{C}$, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(1) = \{a \times 1 \mid a \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$.

Théorème 41 – Propriétés des Vect

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, X et Y deux parties de E et $x,a,b \in E$.

(i) Croissance pour l'inclusion. Si $X \subset Y$, alors $\mathrm{Vect}(X) \subset \mathrm{Vect}(Y)$.

(ii) Oter un vecteur. Si $x \in X$ est combinaison linéaire de $X \backslash \{x\}$, alors $\mathrm{Vect}(X) = \mathrm{Vect}(X \backslash \{x\})$.

(iii) Remplacer un vecteur. Si b est combinaison linéaire de $X \cup \{a\}$ avec un coefficient NON NUL sur a, alors

$$\mathrm{Vect}(X \cup \{a\}) = \mathrm{Vect}(X \cup \{b\}).$$

Démonstration. ... ■

Exemple 42 Dans $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Vect}((1,1,0),(0,1,0),\underbrace{(1,3,0)}_{\substack{\text{Combinaison linéaire}\\ \text{de } (1,1,0) \text{ et } (0,1,0)}}) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,1,0)) = \mathrm{Vect}((1,1,0)-(0,1,0),(0,1,0))...$$

$$... = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0)) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}.$$

2 Sous-espaces affines

Dans l'ensemble de cette section, E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

2.1 Structure affine d'un espace vectoriel

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ ou l'espace $\mathbb{R}^3$, nous avons l'habitude d'identifier les points et les vecteurs via le choix d'un point de référence ou *origine* O. Une telle origine étant fixée, toute relation $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ nous autorise à confondre le point M et le vecteur $\vec{u}$.

Considérer la structure affine d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E consiste à interpréter les éléments de E comme des points, via le choix du vecteur nul comme origine O. Dans ce contexte, on note conventionnellement les points avec des majuscules et les vecteurs avec des lettres minuscules, le plus souvent surmontées par une flèche. En outre, pour deux points A et B de E, $\overrightarrow{AB}$ désigne le vecteur $B - A$. Avec ces conventions de notations, on a

$$A = B \iff \overrightarrow{AB} = 0_E, \qquad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}, \qquad B = A + \vec{u} \iff \vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

et on dispose de la *relation de Chasles*

$$\forall A,B,C \in E, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Définition 43 – Transaltion

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, on appelle *translation de vecteur* $\vec{u}$ l'application de E dans E définie par

$$t_{\vec{u}} : M \longmapsto M + \vec{u}.$$

On vérifie sans difficulté qu'une composée de translations est une translation. Précisément, $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$. On en déduit que la translation $t_{\vec{u}}$ est une bijection de réciproque la translation $t_{-\vec{u}}$, puisque $t_{0_E} = \mathrm{Id}_E$.

✖ **Attention !** ✖ Si $\vec{u} \neq 0_E$, $t_{\vec{u}}$ n'est pas une application linéaire, puisque $t_{\vec{u}}(0_E) = \vec{u} \neq 0_E$.

2.2 Sous-espaces affines

Définition-théorème 44 – Sous-espace affine, direction

Une partie $\mathscr{F}$ du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est appelée un *sous-espace affine de* E lorsqu'il existe un point Ω de E et un sous-espace vectoriel F de E tels que

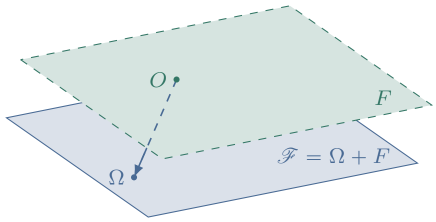
$$\mathscr{F} = \Omega + F = \{\Omega + \vec{u} \mid \vec{u} \in F\}.$$

Le cas échéant, le sous-espace vectoriel F associé au sous-espace affine $\mathscr{F}$ est unique. On l'appelle la *direction de* $\mathscr{F}$ et ses éléments sont appelés les *vecteurs directeurs* de $\mathscr{F}$.

Démonstration. Établissons l'unicité de la direction d'un sous-espace affine $\mathscr{F}$. Soit F et F' deux sous-espaces vectoriels de E et $x, x' \in E$ tels que $\mathscr{F} = x + F = x' + F'$. Par symétrie des rôles, il suffit de montrer l'inclusion $F \subset F'$. Soit $f \in F$, d'une part $x + f \in x + F = x' + F'$, ainsi il existe $f_1' \in F'$ tel que $x + f = x' + f_1'$, d'autre part $x = x + 0_E \in x + F$, ainsi il existe $f_2' \in F'$ tel que $x = x' + f_2'$, par conséquent $f = f_1' - f_2' \in F'$. ■

Remarque 45

- Le sous-espace affine $\Omega + F$ de E est l'image du sous-espace vectoriel F par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$.
- Conventionnellement, nous noterons les sous-espaces vectoriels avec des majuscules droites (F, G, H, ...) et les sous-espaces affines avec des majuscules rondes ($\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$, ...).



Théorème 46 – Caractérisation des sous-espaces affines par leur direction et un point

Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de direction F. Pour tout $A \in \mathscr{F}$, on a alors $\mathscr{F} = A + F$. En particulier, deux sous-espaces affines sont égaux si et seulement s'ils ont la même direction et un point en commun.

Démonstration. ... ■

Exemple 47

- Tout sous-espace vectoriel F de E en est un sous-espace affine et il est sa propre direction, dans la mesure où $F = O + F$. Réciproquement, si un sous-espace affine $\mathscr{F}$ de direction F contient O, alors l'égalité $\mathscr{F} = O + F$ prouve que $\mathscr{F}$ est égal à sa direction et est donc un sous-espace vectoriel.

  En résumé, un sous-espace affine est un sous-espace vectoriel si et seulement s'il contient O, *i.e.* le vecteur nul 0_E.
- L'ensemble $\{(1+t, 3-2t, -1+3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ passant par le point $(1,3,-1)$ et dirigé par $\mathrm{Vect}((1,-2,3))$.

  En effet, $\{(1+t, 3-2t, -1+3t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(1,3,-1) + t(1,-2,3) \mid t \in \mathbb{R}\} = (1,3,-1) + \mathrm{Vect}((1,-2,3))$.
- L'ensemble $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid XP' + P = 2X\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}[X]$ passant par le point X et dirigé par le sous-espace vectoriel $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid XP' + P = 0\}$.

Théorème 48 – Intersection de sous-espaces affines

Soit $(\mathscr{F}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour tout $i \in I$, on note F_i la direction de $\mathscr{F}_i$. Les sous-espaces affines $\mathscr{F}_i$, i décrivant I, sont dits *concourants* ou *sécants* lorsque $\bigcap_{i \in I} \mathscr{F}_i \neq \varnothing$.
Le cas échéant, $\bigcap_{i \in I} \mathscr{F}_i$ est un sous-espace affine de E de direction $\bigcap_{i \in I} F_i$.

Démonstration. ... ■

✖ **Attention !** ✖ Tandis qu'une intersection de sous-espaces vectoriels contient toujours le vecteur nul et ne saurait donc être vide, une intersection de sous-espaces affines peut effectivement être vide. Il suffit de considérez le cas de deux droites parallèles non confondues dans le plan.

Remarque 49 – Parallélisme (HP) La structure affine d'un espace vectoriel permet de définir la notion de *parallélisme*. Précisément, pour deux sous-espaces affines $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dirigés respectivement par F et G,

- $\mathscr{F}$ est dit *parallèle à* $\mathscr{G}$ lorsque $F \subset G$;
- $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont dits *parallèles* lorsque $F = G$.

Ainsi, dans l'espace usuel $\mathbb{R}^3$ une droite peut être parallèle à un plan, deux plans peuvent être parallèles, mais un plan n'est jamais parallèle à une droite.

3 Familles de vecteurs

Dans l'ensemble de cette section, E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et n désigne un entier naturel. Par convention, une liste $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 0}$ d'éléments de E correspond à la famille vide, *i.e.* l'ensemble vide.

3.1 Familles et parties génératrices

Définition 50 – Partie/famille génératrice

Soit X une partie du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que la partie X est *génératrice de* E ou *engendre* E lorsque tout élément de E est combinaison linéaire d'éléments de X, *i.e.* $E = \mathrm{Vect}(X)$.
En particulier, si $X = \{x_i \mid i \in I\}$, on dit aussi que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est *génératrice de* E ou *engendre* E.

Exemple 51 La famille $\left(X^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{K}[X]$ et la famille $(1, X, \ldots, X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple 52

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, ainsi $((1, 0), (0, 1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^2$.
- De même, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$, $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, donc $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ engendre $\mathbb{K}^3$.
- Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$, autrement dit $e_i = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. La famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$.
  En effet, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$.

Exemple 53 La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ engendre $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, puisque, pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{K}$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, notons $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j), égal à 1. La famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est alors génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, puisque, pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{i,j} E_{i,j}$ (corollaire 9 du chapitre 12).

Exemple 54 La famille $(1, i)$ engendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais (1) suffit à engendrer le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Le théorème qui suit n'est pour l'essentiel qu'une simple reformulation du théorème 41 de propriétés des Vect.

Théorème 55 – Propriétés des parties génératrices

Soit X et Y deux parties du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

(i) Inclusion. Si X engendre E et si $X \subset Y$, alors Y engendre E.
(Toute « sur-famille » d'une famille génératrice est génératrice.)

(ii) Oter un vecteur. Si X engendre E et si $x \in \mathrm{Vect}(X \backslash \{x\})$, alors $X \backslash \{x\}$ engendre E.

(iii) Remplacer un vecteur. Si $X \cup \{a\}$ engendre E et si b est combinaison linéaire de $X \cup \{a\}$ avec un coefficient NON NUL sur a, alors $X \cup \{b\}$ engendre E.

Corollaire 56

Soit X une partie génératrice de E. Une partie Y de E engendre E si et seulement si tout vecteur de X est combinaison linéaire de vecteurs de Y, *i.e.* $X \subset \mathrm{Vect}(Y)$.

Démonstration. Soit Y une partie de E.

- Supposons que $X \subset \mathrm{Vect}(Y)$. Alors $E = \mathrm{Vect}(Y)$, dans la mesure où
$$E = \mathrm{Vect}(X) \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{Vect}(Y)) = \mathrm{Vect}(Y) \subset E.$$
- Supposons que Y engendre E. Alors $X \subset E = \mathrm{Vect}(Y)$. ■

✎ **En pratique** ✎ Trouver une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel revient à l'écrire comme un Vect.

Exemple 57 L'ensemble $E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + 2y - z = 0 \text{ et } x - y + t = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $((1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 1))$.

Exemple 58 L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid 2P(X + 1) = XP'\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ engendré par $X^2 - 4X + 3$.

3.2 Familles et parties libres ou liées

Définition 59 – Partie/famille libre d'un nombre fini de vecteurs

Soit $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. La partie $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ou la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est dite *libre* ou les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ sont dits *linéairement indépendants* lorsque
$$\forall (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0\right).$$

Quitte à remplacer λ_i par $\lambda_i - \mu_i$ dans la définition de la liberté, on peut aussi dire que $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre lorsque
$$\forall (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, (\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in [\![1\,,n]\!], \quad \lambda_i = \mu_i\right),$$
ce qui n'est rien d'autre qu'un PRINCIPE D'IDENTIFICATION. En résumé :

FAMILLE GÉNÉRATRICE	=	EXISTENCE pour TOUT vecteur d'une décomposition comme combinaison linéaire.
FAMILLE LIBRE	=	UNICITÉ des coefficients dans les combinaisons linéaires, ce qui autorise les IDENTIFICATIONS.

Définition 60 – Partie/famille liée d'un nombre fini de vecteurs, couple de vecteurs colinéaires

- Soit $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. La partie $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ou la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est dite *liée* ou les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ sont dits *linéairement dépendants* lorsque la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ N'est PAS libre. Ceci équivaut à ce qu'AU MOINS UN des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ soit combinaison linéaire des autres.
- Soit x, y deux vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Les vecteurs x et y sont dits *colinéaires* lorsque la paire $\{x, y\}$ est liée, *i.e.* lorsque x ou y est un multiple de l'autre.

Dire que $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est liée revient à dire qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \;\text{ et }\; \exists i_0 \in [\![1\,,n]\!], \quad \lambda_{i_0} \neq 0\right),$$
auquel cas $x_{i_0} = -\dfrac{1}{\lambda_{i_0}} \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq i_0}} \lambda_i x_i$, *i.e.* x_{i_0} est « combinaison linéaire des autres x_i ».

✖ **Attention !** ✖ L'assertion « $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad x = \lambda y$ » ne suffit pas pour exprimer que deux vecteurs x et y sont colinéaires. En effet, si $x = 0_E$ et $y \neq 0_E$, la famille (x, y) est liée, mais il n'existe aucun scalaire λ tel que $y = \lambda x$.

Exemple 61 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$.
La famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre dans $\mathbb{K}^n$ – principe d'IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS D'UNE FAMILLE DE SCALAIRES.

En effet, pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, ainsi l'égalité $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = (0, \ldots, 0)$ implique directement $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Exemple 62 Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Notons, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j), égal à 1. La famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est alors libre dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ – principe d'IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS D'UNE MATRICE.

Exemple 63 La famille $((2, 1), (-1, 3), (0, 2))$ est liée dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 64 La famille $\left(X^2 - X + 1, X^2 + X - 2, X^2 - 2X + 3\right)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 65 La famille $(\sin, \cos)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exemple 66 La famille $(1, i)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ – principe d'IDENTIFICATION DES PARTIES RÉELLE ET IMAGINAIRE – mais liée dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
En effet, la famille est liée sur $\mathbb{C}$ puisque $i = i \times 1$.

Exemple 67 Toute partie/famille de vecteurs qui contient le vecteur nul est liée.
En effet, le vecteur nul est combinaison linéaire – à coefficients tous nuls - de n'importe quelle famille de vecteurs.

Exemple 68 – Famille formée d'un vecteur Toute partie $\{x\}$/famille (x) formée d'un seul vecteur est libre si et seulement si x n'est pas le vecteur nul (conséquence directe du point **(i)** du théorème 3).

Exemple 69 – Famille de polynômes échelonnée en degré (à connaître !)
Toute famille $(P_1, \ldots, P_n)$ de polynômes NON NULS de $\mathbb{K}[X]$ pour laquelle $\deg P_1 < \ldots < \deg P_n$ est libre. Une telle famille est dite *échelonnée en degré*. Cet exemple est VITAL !

Exemple 70 – Famille échelonnée de vecteurs de $\mathbb{K}^n$
Soit $(u_1, \ldots, u_p)$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, une famille de vecteurs NON NULS de $\mathbb{K}^n$. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, notons i_k l'indice de la première coordonnée non nulle de u_k. La famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est dite *échelonnée* lorsque la suite $(i_1, \ldots, i_p)$ est strictement croissante. Le cas échéant, la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre.

La famille $((1, 0, 2, -1), (0, 0, -4, 2), (0, 0, 0, -5))$ est une famille échelonnée de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et est donc libre.

Définition 71 – Partie/famille libre/liée d'un nombre quelconque de vecteurs

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

- La famille $(x_i)_{i \in I}$ ou la partie $\{x_i \mid i \in I\}$ est dite *libre* lorsque

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \quad \left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in I, \quad \lambda_i = 0 \right).$$

- La famille $(x_i)_{i \in I}$ ou la partie $\{x_i \mid i \in I\}$ est dite *liée* lorsque la famille $(x_i)_{i \in I}$ N'est PAS libre. Ceci équivaut à ce qu'AU MOINS UN des vecteurs x_i soit combinaison linéaire des autres.

La quantification portant sur les familles presque nulles de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$, on est systématiquement ramené à des combinaisons linéaires d'un nombre FINI de vecteurs. Ainsi la liberté d'une famille quelconque de vecteurs équivaut, par définition, à la liberté de TOUTES ses sous-familles FINIES. En particulier, une famille $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs est libre si et seulement si la famille $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est libre, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 72 L'ensemble vide est une partie libre de tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 73 $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$ – principe d'IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS D'UN POLYNÔME.

Théorème 74 – Propriétés des parties libres/liées

Soit X et Y deux parties du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et y un vecteur de E.

(i) Inclusion. Si Y est libre et si $X \subset Y$, alors X est libre.
Par contraposition, si X est liée et si $X \subset Y$, alors Y est liée.
(Toute « sous-famille » d'une famille libre est libre / Toute « sur-famille » d'une famille liée est liée.)

(ii) Ajout d'un vecteur. Si X est libre, alors $X \cup \{y\}$ est libre si et seulement si $y \notin \mathrm{Vect}(X)$.

Démonstration. ... ■

On déduit en particulier du point **(i)** qu'une famille libre ne saurait contenir deux vecteurs colinéaires, et *a fortiori* deux vecteurs égaux.

✖ ATTENTION ! ✖ Une famille contenant deux vecteurs colinéaires est liée, mais une famille d'au moins trois vecteurs peut être liée sans contenir deux vecteurs colinéaires (cf. exemple 63).

Dire qu'une famille est libre revient à dire qu'aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres. Ainsi, si l'on veut que l'ajout d'un vecteur conserve la liberté d'une famille libre, il est nécessaire de ne pas introduire de dépendance entre ses vecteurs, autrement dit veiller à n'ajouter que des vecteurs linéairement indépendants de ceux déjà présents.

3.3 Bases

Définition 75 – Base, coordonnées

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une FAMILLE de vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

- On dit que $\mathscr{B}$ est une *base de E* lorsque $\mathscr{B}$ est une famille libre et génératrice de E, *i.e.* si et seulement si tout vecteur de E s'écrit d'une unique façon comme une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{B}$.
- Le cas échéant, pour tout $x \in E$, l'unique famille presque nulle de scalaires $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ pour laquelle $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ est appelée la *famille des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.*

Les bases sont toujours des FAMILLES et non des ensembles. En effet, dans le plan muni d'une base, peut-on parler du point de coordonnées $\{1, 2\}$? Clairement non, puisque le point de coordonnées $(1, 2)$ n'est pas le point de coordonnées $(2, 1)$! L'ordre des éléments a ici une importance cruciale.

Exemple 76 La famille $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ et les coordonnées d'un nombre complexe dans cette base sont ses parties réelle et imaginaire.

Remarque 77 – Convention de la base vide Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E trivial $\{0_E\}$ réduit au vecteur nul possède une unique base : l'ensemble vide (cf. exemples 34 et 72).

L'énoncé suivant est une synthèse des exemples précédents (cf. exemples 51 à 53, 61, 62 et 73).

Définition-théorème 78 – Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- **Familles de scalaires.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,$ $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. La famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ – dite *base canonique.*
- **Polynômes.** La famille $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ – dite *base canonique* – et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\left(X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ – aussi dite *base canonique.*
- **Matrices.** Pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j), égal à 1.
La famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ – dite *base canonique.*

Le qualificatif « canonique » doit être compris au sens de « la plus naturelle ». On veillera à ne pas l'utiliser à tort et à travers ! De fait, les bases exhibées ci-dessus sont les plus naturelles, les plus faciles d'emploi auxquelles on peut penser dans $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base canonique sont... ce vecteur lui-même ! On peut difficilement faire plus simple.
- Pour tout $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, la famille des coordonnées de P dans la base canonique est la famille $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de ses coefficients, *i.e.* P lui-même si l'on veut bien se rappeler qu'un polynôme est par définition une suite presque nulle de scalaires.
- Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille de coordonnées de A dans la base canonique est $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$... *i.e.* A elle-même.

Exemple 79 La famille $((1,1),(1,-2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 80 La famille $\left(X^2+X, X^2+1, X+1\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

✎ **En pratique** ✎ Pour déterminer une base d'un espace vectoriel, on en cherche initialement une famille génératrice en écrivant celui-ci comme un Vect, puis on essaie d'établir que la famille obtenue est libre.

Exemple 81 La famille $((2,1,1))$ est une base du sous-espace vectoriel A de $\mathbb{R}^3$ défini par $\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ 3x - 2y - 4z = 0. \end{cases}$

Exercice 82 L'ensemble F des matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^\top = M + \mathrm{tr}(M) I_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de base $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

Exemple 83 – Base des polynômes de Lagrange Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts et $L_0, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à ces $n+1$ points. La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est alors une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base sont $(P(x_0), \dots, P(x_n))$.
En effet, le théorème 48 du chapitre 17 établit que, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$,

$$P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![0\,,n]\!], \quad y_i = P(x_i).$$

Exemple 84 – Interprétation de la formule de Taylor polynomiale Supposons que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, la famille $\left((X-\alpha)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ et les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ dans cette base sont $\left(\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

4 Sommes de sous-espaces vectoriels

Dans l'ensemble de cette section, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

4.1 Définition

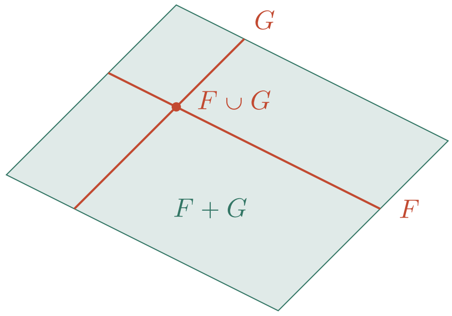
Nous avons vu à l'exercice 7 qu'une union de deux sous-espaces vectoriels F et G de E n'est pas en général un sous-espace vectoriel, ce qui nous amène à considérer le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G.

Définition-théorème 85 – Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

- L'ensemble $F + G = \{f + g \mid f \in F \text{ et } g \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé la *somme de F et G*.
- La somme $F + G$ est aussi le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G, ce qui signifie que tout sous-espace vectoriel de E contenant F et G contient également $F + G$. Autrement dit, $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

Démonstration. Cf. exercice 7. ■



✖ **Attention !** ✖ Il ne faut pas confondre SOMME et RÉUNION ! La somme est un sous-espace vectoriel, mais pas la réunion en général.

Exemple 86 $E + E = E, \quad E + \{0_E\} = E \quad$ et $\quad \{0_E\} + \{0_E\} = \{0_E\}.$

Théorème 87 – Partie génératrice d'une somme de deux sous-espaces vectoriels

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et X et Y deux parties de E. On a toujours

$$\mathrm{Vect}(X \cup Y) = \mathrm{Vect}(X) + \mathrm{Vect}(Y).$$

Autrement dit, si X et Y sont respectivement des parties génératrices de F et G, alors $X \cup Y$ est une partie génératrice de $F + G$.

Démonstration. ... ■

✖ **Attention !** ✖ Le théorème précédent est faux si l'on remplace « partie génératrice » par « partie libre ». Ainsi, si X et Y engendrent respectivement F et G, $X \cup Y$ engendre $F + G$, mais si X et Y sont en outre libres (et donc associées à des bases respectives de F et G), on ne peut rien dire en général de la liberté de $X \cup Y$. En effet, les vecteurs de $F \cap G$ sont à la fois combinaisons linéaires de X et combinaisons linéaires de Y.

Exemple 88 Les droites vectorielles $F = \mathrm{Vect}((1,0,0))$ et $G = \mathrm{Vect}((0,1,0))$ de $\mathbb{R}^3$ ont pour somme le plan d'équation $z = 0$.

4.2 Somme directe

Définition 89 – Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Les sous-espaces F et G sont dits *en somme directe* lorsque la décomposition d'un vecteur de la somme $F + G$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est toujours unique, *i.e.*

$$\forall f, f' \in F, \quad \forall g, g' \in G, \quad \big(f + g = f' + g' \quad \Longrightarrow \quad f = f' \text{ et } g = g'\big).$$

On note alors $F \oplus G$ la somme $F + G$ pour indiquer que la somme est directe.

Il est important de saisir que, lorsque la somme est directe, les notations $F + G$ et $F \oplus G$ désignent le MÊME ensemble de vecteurs, la seconde notation ayant l'avantage d'apporter une précision concernant une propriété de cette somme.

Théorème 90 – Caractérisation de la somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) F et G sont en somme directe.

(ii) $F \cap G = \{0_E\}$.

(iii) $\forall (f,g) \in F \times G, \quad (f + g = 0_E \implies f = g = 0_E)$,
autrement dit la seule décomposition de 0_E dans $F + G$ est la décomposition triviale $0_E = 0_E + 0_E$.

Démonstration. ... ■

Exemple 91 Dans $\mathbb{K}^3$, le plan $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \;\big|\; x + y + z = 0\big\}$ et la droite $G = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \;\big|\; x = y = z\big\}$ sont en somme directe.

Théorème 92 – Bases de la somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que F et G possèdent chacun une base, notées respectivement $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Les sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si la famille obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est une base de $F + G$.

Le cas échéant, une telle base dont les premiers vecteurs forment une base de F et les suivants une base de G est dite *adaptée à la somme directe* $F \oplus G$.

Démonstration. ... ■

Exemple 93 La famille $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1))$ est une base adaptée à la somme directe $F \oplus G$ de l'exemple 91.

En particulier, en « coupant » une base $\mathscr{B}$ en deux sous-familles (libres donc !) $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, les sous-espaces engendrés par $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ respectivement sont en somme directe. On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 94 – Obtention d'une somme directe à partir d'une famille libre

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille libre de vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si (I_1, I_2) est une partition de I, alors les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}(x_i)_{i\in I_1}$ et $\text{Vect}(x_i)_{i\in I_2}$ de E sont en somme directe.

4.3 Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel

Définition-théorème 95 – Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Les assertions suivantes sont équivalentes

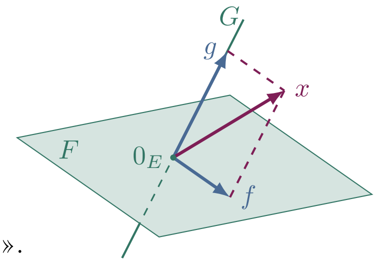
(i) Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G

$$\forall x \in E, \quad \exists!(f, g) \in F \times G, \quad x = f + g.$$

(ii) L'espace E est la somme directe de F et G, *i.e.* $E = F \oplus G$.

Le cas échéant, les sous-espaces F et G sont dits *supplémentaires dans* E. On dit aussi que F est UN *supplémentaire de* G *dans* E et que G est UN *supplémentaire de* F *dans* E.

Ainsi deux sous-espaces vectoriels de E sont supplémentaires si leur somme est la plus grande possible, *i.e.* E tout entier, et leur intersection la plus petite possible, *i.e.* $\{0_E\}$. Il est classique d'illustrer cette situation par des figures dans $\mathbb{R}^3$ censées représenter schématiquement le cas général.



✖ Attention ! ✖

- Il ne faut pas confondre les notions de « supplémentaire dans E » et de « somme directe ».
  Dire que F et G sont en somme directe revient à affirmer que tout vecteur de E admet AU PLUS UNE décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Pour être précis, les vecteurs de $F+G$ ont alors exactement une décomposition de cette forme, tandis que ceux de $E\backslash(F + G)$ n'en ont pas.
  Dire que F et G sont supplémentaires dans E revient à affirmer en plus que $E = F + G$ et donc que tout vecteur de E admet EXACTEMENT UNE décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
- Un sous-espace vectoriel possède-t-il toujours un supplémentaire ? Oui, toutefois nous le démontrerons seulement en dimension finie (cf. chapitre 23).
- Il est interdit de parler « du » supplémentaire d'un sous-espace vectoriel en général, faute d'unicité (cf. exemples 96 et 97 ci-dessous).
- Il ne faut pas non plus confondre la notion vectorielle de « supplémentaire » avec celle ensembliste de « complémentaire ». D'une part, il y a absence d'unicité pour la supplémentarité, alors qu'il y a unicité du complémentaire. D'autre part, un supplémentaire est un sous-espace vectoriel, tandis que le complémentaire d'un sous-espace vectoriel ne contient même pas le vecteur nul.

Exemple 96 Deux droites NON CONFONDUES passant par $(0, 0)$ sont toujours supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
Si P est un plan de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0, 0, 0)$ et D une droite de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0, 0, 0)$ NON CONTENUE DANS P, alors P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 97 La droite $G_\alpha = \mathrm{Vect}((1, \alpha, 1))$ est un supplémentaire de $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x + y + z = 0\big\}$ dans $\mathbb{R}^3$, pour tout $\alpha \neq -2$.

Exemple 98 Supposons $2 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$. L'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 99 Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré $n \geqslant 1$, $\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$, où $P\mathbb{K}[X] = \{PQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$.
En effet, $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $P\mathbb{K}[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ et on souhaite établir que

$$\forall A \in \mathbb{K}[X], \quad \exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X], \quad A = PQ + R,$$

ce qui correspond au théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 100 L'existence et l'unicité de la partie entière d'une fraction rationnelle prouve que $\mathbb{K}[X]$ et l'ensemble des fractions rationnelles de degré strictement négatif sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}(X)$ (théorème 12 du chapitre 18).

5 Structure d'algèbres (programme de MP)

Nous savons maintenant que deux structures algébriques cohabitent sur les ensembles $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^I$ (avec I un intervalle de $\mathbb{R}$) : une structure d'anneau et une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarquons alors que cette cohabitation ne se fait pas de façon totalement indépendante pour la loi de multiplication interne liée à la structure d'anneau et celle de multiplication externe liée à la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Par exemple, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad (\lambda P)Q = P(\lambda Q) = \lambda(PQ) \qquad \text{et} \qquad \forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad (\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

La définition suivante propose de formaliser ces observations.

Définition 101 – Algèbre sur un corps

On appelle $\mathbb{K}$-*algèbre* (ou *algèbre sur* $\mathbb{K}$) tout quadruplet $(E, +, \times, \cdot)$ vérifiant

(i) $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;

(ii) $(E, +, \times)$ est un anneau ;

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in E, \quad (\lambda x) \times y = x \times (\lambda y) = \lambda(x \times y)$.

On qualifie de *commutative* toute algèbre dont l'anneau sous-jacent est commutatif.

Exemple 102

- Pour tout corps $(\mathbb{K}, +, \times)$, le quadruplet $(\mathbb{K}, +, \times, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
- Le corps $\mathbb{C}$ est à la fois muni d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre et de $\mathbb{R}$-algèbre.
  Plus généralement, si $\mathbb{K}$ est un corps et $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$, alors $\mathbb{K}$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre et aussi de $\mathbb{L}$-algèbre.
- Les quadruplets $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ et $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont des $\mathbb{K}$-algèbres.
- Si E est une $\mathbb{K}$-algèbre et X un ensemble non vide, alors E^X est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre (cf. théorème 9 ci-dessus et théorème 57 du chapitre 11). En particulier, l'ensemble $\mathbb{K}^X$ des fonctions définies sur X et à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre.

Définition 103 – Morphisme d'algèbres

On appelle *morphisme d'algèbres* toute application entre deux $\mathbb{K}$-algèbres qui est simultanément une application linéaire et un morphisme d'anneaux.

On définit aussi de façon classique les notions d'endomorphismes, d'isomorphismes et d'automorphismes d'algèbres.

Exemple 104

- La conjugaison est un automorphisme de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{C}$ (mais pas pour la structure de $\mathbb{C}$-algèbre !).
- Soit $R \in \mathbb{K}[X]$. L'application de composition à droite $P \longmapsto P \circ R$ est un endomorphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 105 – Évaluation polynomiale en un élément d'une $\mathbb{K}$-algèbre

- Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. L'application d'évaluation $P \longmapsto P(\alpha)$ est un morphisme (surjectif) d'algèbres de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathbb{K}$.
- Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. L'application d'évaluation $P \longmapsto P(M)$ est un morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Plus généralement, si E est une $\mathbb{K}$-algèbre et x un élément de E, alors l'application d'évaluation $P \longmapsto P(x)$ est un morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[X]$ dans E.
- En particulier, pour $Q \in \mathbb{K}[X]$, l'application d'évaluation $P \longmapsto P(Q)$ est un endomorphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}[X]$. Cela légitime la notation $P(Q)$ de la composition $P \circ Q$ (cf. définition 21 du chapitre 14).

Définition 106 – Sous-algèbre

Soit $(E, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. On appelle *sous-algèbre de E* toute partie de E stable pour les lois $+$, $\times$ et $\cdot$, et qui est une $\mathbb{K}$-algèbre pour les lois induites par celles de E.

Comme toujours, on préférera en pratique la caractérisation suivante pour établir qu'une partie est une sous-algèbre.

Théorème 107 – Caractérisation des sous-algèbres

Soit E une $\mathbb{K}$-algèbre. Une partie F de E est une sous-algèbre de E si et seulement si elle vérifie les deux assertions suivantes

(i) F est un sous-anneau de E ; **(ii)** F est stable pour la loi externe « $\cdot$ ».

Exemple 108 Soit n un entier naturel non nul.

- L'ensemble $\mathbb{R}$ est une sous-algèbre de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{C}$.
- Plus généralement, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
- Les ensembles de matrices $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$, $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K} \cdot I_n$ sont des sous-algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Les ensembles $\mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{K})$, $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ et $\mathscr{D}^k(I, \mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathbb{K}^I$.

✖ **Attention !** ✖ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathbb{K}[X]$, dans la mesure où ce sous-ensemble n'est pas stable par produit.

Compétences à acquérir

- Montrer qu'un ensemble est muni d'une structure de (sous-)espace vectoriel : exercices 5 à 7.
- Déterminer si un vecteur est combinaison linéaire d'une famille de vecteurs : exercices 3 et 4.
- Manipulation des Vect : exercices 8 à 11.
- Montrer qu'une famille de vecteurs est génératrice : exercices 14 et 22.
- Montrer qu'une famille de vecteurs est libre/liée : exercices 15 à 25.
- Montrer qu'une famille de vecteurs est une base : exercices 26 à 28.
- Déterminer une base d'un espace vectoriel : exercices 29 à 30.
- Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base : exercices 26 et 27.
- Montrer que deux sous-espaces sont en somme directe : exercice 32.
- Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires : exercices 32 à 39.

Quelques résultats classiques :

- Famille de polynômes échelonnée en degré (exemple 69).
- Famille échelonnée de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ (exemple 70).
- Base des polynômes de Lagrange (exemple 83).
- Interprétation de la formule de Taylor polynomiale (exemple 84).
- Supplémentarité de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (exemple 98).
- Unions, intersections et sommes de sous-espaces vectoriels(exercice 7).
- Familles libres de fonctions (exercice 24).
- Supplémentarité des sous-espaces de fonctions paires et impaires (exemple 35).