20 | Convexité

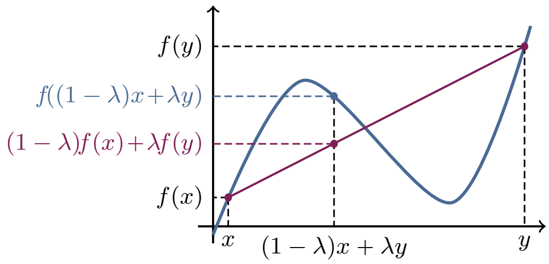
Dans ce chapitre, la lettre I désigne un INTERVALLE de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

1 Définitions

Lemme 1 – Paramétrage d'un segment

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \leqslant y$, $\quad [x\,,y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y \mid \lambda \in [0\,,1]\}$.

Démonstration. Si $x < y$, alors $f : \lambda \longmapsto (1-\lambda)x + \lambda y$ est une bijection (croissante) de $[0\,,1]$ sur $[x\,,y]$. ■



Cordes et sécantes du graphe d'une fonction Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x, y \in I$. Quand λ parcourt le segment $[0\,,1]$, $(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ décrit le segment $[f(x)\,,f(y)]$ et, dans le plan, le point de coordonnées

$$((1-\lambda)x + \lambda y, (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y))$$

décrit le segment d'extrémités $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$, appelé une *corde du graphe de* f. Par ailleurs, si $x \neq y$, la droite passant par les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ est appelée une *sécante du graphe de* f.

Définition 2 – Convexité/concavité

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- La fonction f est dite *convexe sur* I lorsque

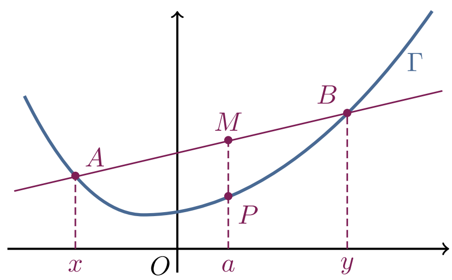
$$\forall x, y \in I, \quad \forall \lambda \in [0\,,1], \quad f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

- La fonction f est dite *concave sur* I lorsque son opposé $-f$ est convexe, *i.e.*

$$\forall x, y \in I, \quad \forall \lambda \in [0\,,1], \quad f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Interprétation graphique Soit Γ le graphe de la fonction f dans le plan. La fonction f est convexe sur I si et seulement si, pour tous points A et B de Γ d'abscisses respectives x et y, la courbe de f est en dessous de la corde $[A\,,B]$.

En effet, pour tout a appartenant au segment $[x\,,y]$, *i.e.* de la forme $(1-\lambda)x + \lambda y$ avec $\lambda \in [0\,,1]$, les points P et M d'abscisses a et se trouvant respectivement sur Γ et sur la corde $[A\,,B]$, admettent respectivement $f((1-\lambda)x + \lambda y)$ et $(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ pour ordonnées.



Théorème 3 – Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $x, y \in I$ avec $x < y$.
Le graphe de f est situé au-dessous de sa sécante sur $[x\,,y]$ et au-dessus de sa sécante à l'extérieur de $[x\,,y]$.

Démonstration. ... ■

Exemple 4

- Toute fonction affine est à la fois convexe et concave.
- La fonction valeur absolue est convexe. En effet, pour tous $\lambda \in [0\,,1]$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|(1-\lambda)x + \lambda y| \leqslant |(1-\lambda)x| + |\lambda y| = (1-\lambda)|x| + \lambda|y|.$$

- Une somme de fonctions convexes (resp. concaves) est une fonction convexe (resp. concave).

Le théorème suivant indique que l'inégalité qui définit la convexité d'une fonction se généralise à n points.

Théorème 5 – Inégalité de Jensen[†]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est une fonction convexe sur I et $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de réels POSITIFS telle que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, alors

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in I^n, \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

On dispose naturellement de cette inégalité dans l'autre sens lorsque f est concave.

Démonstration. ... ■

Remarque 6 Si f est convexe sur I et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels positifs non tous nuls, alors

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in I^n, \quad f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}\right) \leqslant \frac{\lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}$$

et, en particulier, $f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.

2 Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes

Le théorème suivant se résume en un dessin ! Il exprime une caractérisation de la convexité par la « croissance des pentes ».

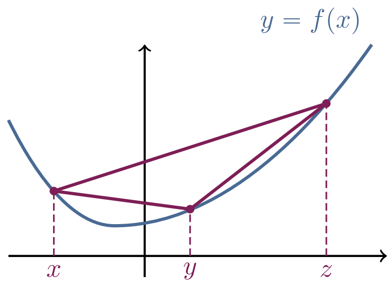
Théorème 7 – Caractérisation de la convexité en termes de pente, inégalité des pentes

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

(i) Caractérisation de la convexité par les pentes des sécantes.
La fonction f est convexe sur I si et seulement si, POUR TOUT $a \in I$, la fonction $\varphi_a : x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \backslash \{a\}$.

(ii) Inégalité des pentes. Si f est convexe sur I, alors

$$\forall x, y, z \in I, \quad x < y < z \implies \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$



Démonstration. ... ■

✖ **ATTENTION !** ✖ Dans la caractérisation précédente, on exige la croissance de φ_a sur $I \backslash \{a\}$, et pas seulement sur chacun des deux intervalles $I \cap]-\infty, a[$ et $I \cap]a, +\infty[$.

Théorème 8 – Régularité des fonctions convexes (HP)

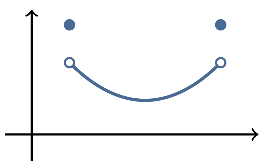
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si I est un intervalle OUVERT et si f est convexe sur I, alors

(i) f est dérivable à gauche et à droite (et donc continue) sur I avec $f'_g \leqslant f'_d$.

(ii) Les fonctions f'_g et f'_d sont croissantes sur I.

Démonstration. ... ■

✖ **ATTENTION !** ✖ Dans le théorème précédent, il est essentiel que l'intervalle I soit ouvert. En effet la fonction « smiley » ci-contre est convexe, mais n'est pas continue aux bornes du domaine de définition.



†. Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859 à Nakskov – 1925 à Copenhague) est un mathématicien autodidacte et ingénieur danois, essentiellement connu pour l'inégalité de Jensen.

3 Caractérisation de la convexité pour les fonctions dérivables

Pour une fonction suffisamment régulière, il existe un lien entre sa convexité et la monotonie de sa dérivée (resp. le signe de sa dérivée seconde).

Théorème 9 – Caractérisation des fonctions convexes dérivables

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La fonction f est convexe sur I ;

(ii) La fonction f' est croissante sur I (ou $f'' \geqslant 0$ sur I si f est deux fois dérivable sur I) ;

(iii) Le graphe de f est situé au-dessus de chacune de ses tangentes, *i.e.*

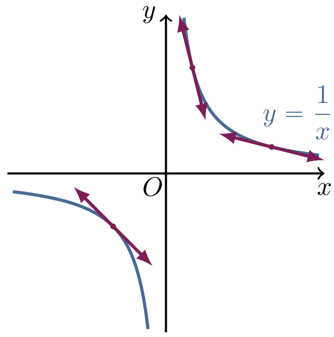
$$\forall x, a \in I, \quad f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x - a).$$

Démonstration. ... ■

Exemple 10

- La fonction inverse est concave sur $]-\infty\,, 0[$ et convexe sur $]0\,, +\infty[$.
- La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ et la fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad e^{(x+y)/2} \leqslant \frac{e^x + e^y}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{\ln x + \ln y}{2}.$$



Exemple 11 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$ est concave sur l'intervalle $]-\infty\,, 3]$ et convexe sur l'intervalle $[3\,, +\infty[$.

En effet, puisque f est polynomiale, elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on peut donc étudier sa convexité via le signe de sa dérivée seconde. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

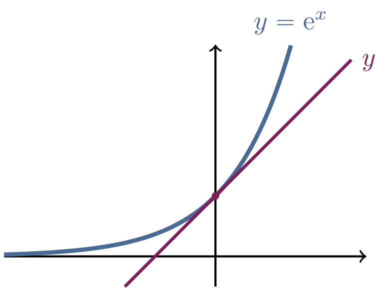
$$f'(x) = 5x^4 - 5 \times 4x^3 = 5(x^4 - 4x^3),$$
$$f''(x) = 5(4x^3 - 4 \times 3x^2) = 20x^2(x - 3).$$

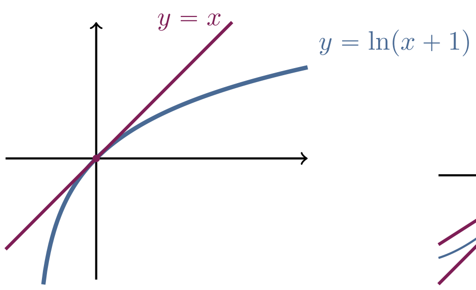
f'' est donc du signe de $x - 3$ et la conclusion découle du tableau de convexité ci-contre.

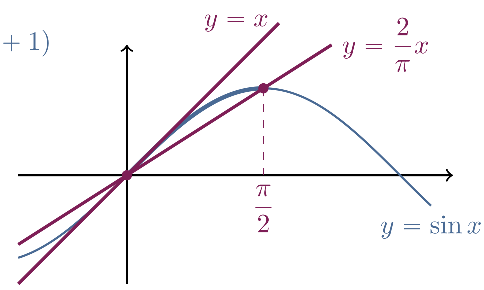
x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
f''		$-$	0	$-$	0	$+$	
f		concave		concave		convexe	

Exemple 12 – Inégalités classiques de convexité

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant x + 1.$ **2.** $\forall x \in\,]-1\,, +\infty[, \quad \ln(1 + x) \leqslant x.$ **3.** $\forall x \in \left[0\,, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$







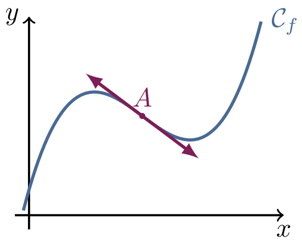
Exemple 13 – Inégalité arithmético-géométrique Pour tous réels $x_1, \dots, x_n$ strictement positifs,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

ce qui exprime que la *moyenne géométrique* est inférieure à la *moyenne arithmétique*.

Définition 14 – Point d'inflexion

Soit a un point intérieur de I et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en a.
On dit que la fonction f admet un *point d'inflexion en a* lorsque f subit un changement de convexité en a, *i.e.* f est convexe au voisinage à gauche de a et concave au voisinage à droite de a, ou vice-verca.



En un tel point, la tangente – si elle existe – traverse la courbe. Pour cette raison, la détermination des points d'inflexion aide à bien représenter l'allure de la courbe d'une fonction.

Théorème 15

Soit a un point intérieur à I et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

(i) Si f est dérivable sur I, alors f admet un point d'inflexion en a si et seulement si la courbe de f traverse sa tangente en ce point.

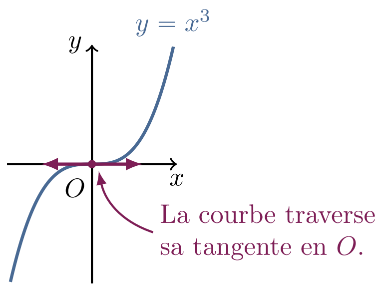
(ii) Si f est deux fois dérivable sur I, alors f admet un point d'inflexion en a si et seulement si f'' s'annule en a en changeant de signe.

Démonstration. Conséquence du théorème 9. ■

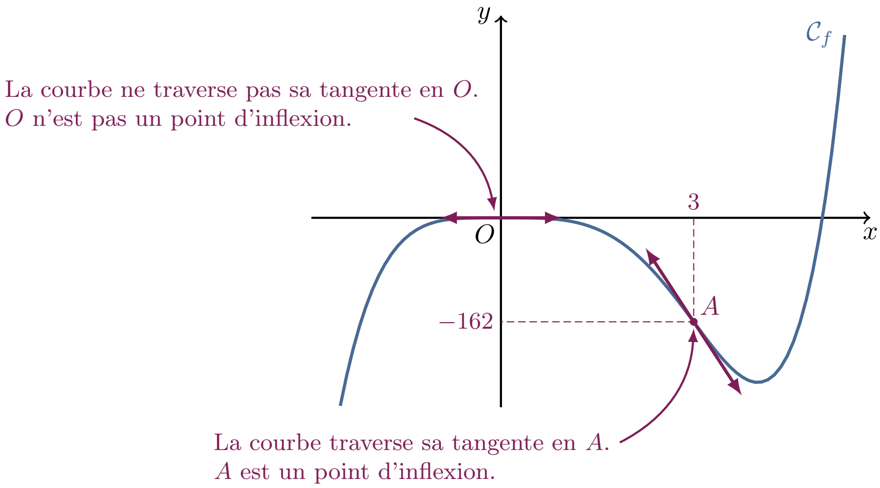
Exemple 16 La courbe représentative de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet l'origine $O(0,0)$ du repère comme point d'inflexion.
En effet, f est polynomiale donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2 \quad \text{et} \quad f''(x) = 6x.$$

Ainsi f'' s'annule en changeant de signe en 0.



Exemple 17 La courbe de la fonction de l'exemple 11 admet un unique point d'inflexion, à savoir le point A de coordonnées $(3, f(3)) = (3, -162)$.



Compétences à acquérir

- Établir qu'une fonction est convexe/concave : exercices 1 à 3 et 14.
- Obtention d'inégalités par convexité : exercices 4 à 8.
- Obtenir des propriétés pour une fonction par convexité : exercices 9 et 10.

Quelques résultats classiques :

- Inégalités classiques de convexité (exemple 12).
- Inégalité arithmético-géométrique (exemple 13).
- Extrema d'une fonction convexe (exercice 9).