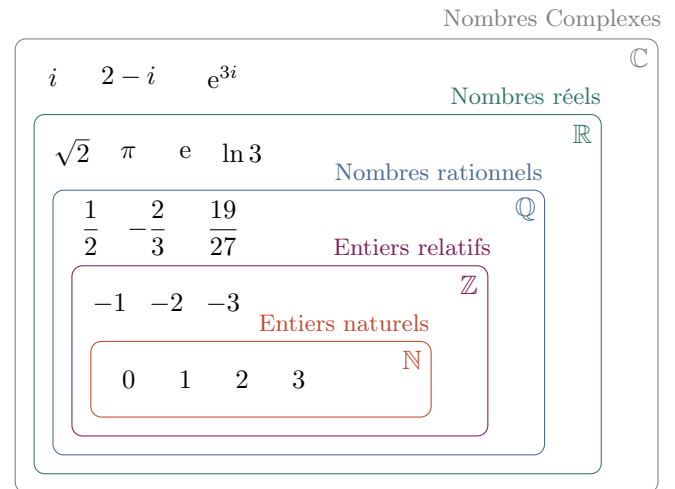


1 Ensembles de nombres

1.1 Ensembles usuels de nombres

Rappelons les notations usuelles des principaux ensembles de nombres.

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des *entiers naturels* : $0, 1, 2, \dots$
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des *entiers relatifs* : ensemble des entiers naturels et de leurs opposés.
- $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des *rationnels* : ensemble des quotients p/q , où p et q sont deux entiers relatifs, q étant non nul.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des *réels* : ils contiennent, outre les rationnels, les nombres *irrationnels* tels que $\sqrt{2}$, π , $\dots$
- $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des *complexes*.



- Ces ensembles privés de 0 sont respectivement notés $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$.
- $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_-$) désigne l'ensemble des réels positifs (resp. négatifs) ou nuls et $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) désigne l'ensemble des réels strictement positifs (resp. strictement négatifs).
- Par analogie, on recourt également aux notations $\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_-^*$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_-^*$ et $\mathbb{Q}_-^*$.

1.2 Intervalles

Pour tous réels a et b , on introduit différents ensembles de nombres appelés *intervalles* (de $\mathbb{R}$) :

- *segments* ou *intervalles fermés* : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$;
- *intervalles ouverts* : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \quad]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \quad \text{et} \quad]-\infty, +\infty[= \mathbb{R} ;$$

- *intervalles semi-ouverts à droite* : $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ et $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$;
- *intervalles semi-ouverts à gauche* : $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ et $] -\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$.

Remarque 1 L'ensemble vide est un intervalle puisque l'on a par exemple $\emptyset =]0, 0[$.

On peut aussi être amené à considérer des *intervalles d'entiers*. Pour tous entiers relatifs a et b , on note

$$[a, b] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\}, \quad [a, +\infty[= \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n\} \quad \text{et} \quad]-\infty, a] = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq a\}.$$

Remarque 2 L'intervalle d'entiers $[a, b]$ contient exactement $b - a + 1$ éléments.

Exemple 3 $[0, 2] = \{0, 1, 2\}$ contient $2 - 0 + 1 = 3$ éléments.

2 Factorisation primaire et forme irréductible d'un rationnel

Les notions rappelées dans cette section seront reprises en détail et développées au chapitre 13.

Définition-théorème 4 – Division euclidienne, divisibilité

Soit a et b deux entiers naturels avec b non nul.

- Effectuer la *division euclidienne de a par b* revient à déterminer les deux entiers q et r tels que

$$a = b \times q + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b.$$

On appelle q le *quotient* et r le *reste* de cette division euclidienne.

- On dit que a est *divisible par b* lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est nul, autrement dit lorsqu'il existe un entier q tel que $a = b \times q$. On dira de façon équivalente :

$\times a$ est divisible par b ;

$\times a$ est un multiple de b ;

$\times b$ est un diviseur de a ;

$\times b$ divise a .

Exemple 5 Les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6.

Les critères de divisibilité suivants permettent de tester si un nombre est divisible par certains entiers simples, sans avoir à effectuer explicitement de division euclidienne.

Théorème 6 – Critères de divisibilité

- Un entier est divisible par 2 lorsque son CHIFFRE DES UNITÉS est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Un entier est divisible par 3 lorsque la SOMME DE SES CHIFFRES est divisible par 3.
- Un entier est divisible par 5 lorsque son CHIFFRE DES UNITÉS est 0 ou 5.
- Un entier est divisible par 9 lorsque la SOMME DE SES CHIFFRES est divisible par 9.
- Un entier est divisible par 10 lorsque son CHIFFRE DES UNITÉS est 0.

Remarque 7 Il est possible d'énoncer un critère de divisibilité par 7 en remarquant que 7 divise 1001.

Définition 8 – Nombre premier

Un entier naturel est dit *premier* lorsqu'il est distinct de 1 et lorsque ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

Exemple 9 Il existe une infinité de nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

Théorème 10 – Factorisation primaire

Tout entier naturel non nul peut se décomposer en produits de facteurs premiers. En outre, une telle décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Les nombres premiers sont donc les briques élémentaires de la construction des nombres entiers sous forme de produits.

Exemple 11 $22 = 2 \times 11$, $27 = 3^3$, $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$.

Pour expliciter une telle décomposition, pour des entiers de taille modeste, il est crucial de connaître la liste des premiers nombres premiers et les critères de divisibilité qui leur sont éventuellement associés, comme l'illustre la méthode suivante.

En pratique Décomposition d'un entier en produits de facteurs premiers.

- On commence par tester si 588 est divisible par 2 (1^{er} nombre premier). La réponse est « oui », puisque le chiffre des unités de 588 est 8, et on a $588 = 2 \times 294$. Information que l'on résume par la présentation ci-contre.
- On recommence, en testant si 294 est divisible par 2. À nouveau, la réponse est « oui » et $294 = 2 \times 147$.
- On teste à nouveau la divisibilité par 2. La réponse est cette fois « non ». On teste alors le nombre premier suivant, *i.e.* 3. La réponse est « oui », puisque $1 + 4 + 7 = 12$ qui est un multiple de 3, et on a $147 = 3 \times 49$.
- On recommence, en testant si 49 est divisible par 3. La réponse est « non ». On teste alors le nombre premier suivant, *i.e.* 5, pour lequel la réponse est également négative. On teste alors le suivant, *i.e.* 7. Or $49 = 7 \times 7$, la réponse est donc oui.
- Ce processus s'interrompt lorsque l'on aboutit à 1 dans la colonne de gauche. Les facteurs premiers de la décomposition apparaissent alors dans la colonne de droite. Ici $588 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7^2$.

588	2
294	
588	2
294	2
147	
588	2
294	2
147	3
49	
588	2
294	2
147	3
49	7
7	7
1	

Définition 12 – Nombres premiers entre eux

Deux entiers naturels a et b sont dits *premiers entre eux* lorsque leur seul diviseur commun est 1, *i.e.* si leurs factorisations primaires n'ont aucun facteur premier en commun.

Exemple 13 22 et 27 sont premiers entre eux.

Théorème 14 – Forme irréductible d'un rationnel

Tout rationnel peut être écrit d'une et une seule manière, appelée sa *forme irréductible*, sous la forme $\frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ avec $|p|$ et q premiers entre eux.

Remarque 15

- En choisissant p dans $\mathbb{Z}$ et q dans $\mathbb{N}^*$, on impose que le signe de la fraction soit porté par son numérateur. Sans cela, il n'y aurait pas unicité de la forme irréductible.
- Lorsque la réponse d'un calcul numérique est une fraction, il est IMPÉRATIF de présenter cette dernière sous forme irréductible.

En pratique

- Mise sous forme irréductible.** Pour écrire sous forme irréductible un rationnel $\frac{a}{b}$, il suffit de remplacer a et b par leurs factorisations primaires respectives, afin d'identifier les facteurs communs pouvant être simplifiés. Par exemple, la forme irréductible de $\frac{60}{198}$ est

$$\frac{60}{198} = \frac{2^{\cancel{2}} \times \cancel{3} \times 5}{\cancel{2} \times 3^{\cancel{2}} \times 11} = \frac{2 \times 5}{3 \times 11} = \frac{10}{33}.$$

- Réduction au même dénominateur.** Comment réduit-on par exemple la somme $\frac{13}{28} + \frac{5}{42}$ au même dénominateur ?

CERTAINEMENT PAS AINSI : $\frac{13}{28} + \frac{5}{42} = \frac{13 \times 42 + 5 \times 28}{28 \times 42} = \frac{686}{1176}.$

- × On commence par déterminer le PLUS PETIT DÉNOMINATEUR COMMUN des deux fractions $\frac{13}{28}$ et $\frac{5}{42}$, qui est ici $84 = 2^2 \times 3 \times 7$, puisque $28 = 2^2 \times 7$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$ – on a conservé la plus grande puissance de chaque nombre premier apparaissant dans au moins l'une des deux décompositions primaires.

- × On réduit ensuite avec ce plus petit dénominateur commun et on n'oublie pas de présenter le résultat sous forme irréductible : $\frac{13}{28} + \frac{5}{42} = \frac{13 \times 3}{28 \times 3} + \frac{5 \times 2}{42 \times 2} = \frac{49}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{7^2}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{7}{12}.$

3 Inégalités, valeurs absolues et partie entière

Les notions rappelées dans cette section seront reprises en détail et développées au chapitre 9.

Définition-théorème 16 – Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation de comparaison $\leq$, dite *relation d'ordre total*[†], i.e. vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) **Réflexivité.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$.
- (ii) **Antisymétrie.** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$.
- (iii) **Transitivité.** Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.
- (iv) **Ordre total.** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Théorème 17 – Compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition et la multiplication

Soit $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$.

- **Lien stricte/large :** si $a < b$, alors $a \leq b$. LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE !
- **Somme :** si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.
- **Produit :**
 - × **par un réel positif :** si $a \leq b$ et $\lambda \geq 0$, alors $\lambda a \leq \lambda b$.
 - × **par un réel négatif :** si $a \leq b$ et $\lambda \leq 0$, alors $\lambda a \geq \lambda b$. **Attention !**
 - × **d'inégalités positives :** si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $0 \leq ac \leq bd$.
- **Passage à l'inverse :** si $a \leq b$ et si a et b sont de MÊME SIGNE, alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

On peut remplacer dans ces résultats les inégalités larges par des inégalités strictes.

En pratique ✎ Majorer et minorer une fraction.

- MAJORER une fraction de réels POSITIFS revient à majorer son numérateur et MINORER son dénominateur.
- MINORER une fraction de réels POSITIFS revient à minorer son numérateur et MAJORER son dénominateur.

Exemple 18 Soit $x \in [1, 2]$. On souhaite encadrer grossièrement le réel $\frac{2x+1}{3x^2+4}$ par un calcul simple.

En effet, comme $1 \leq x \leq 2$, on a $3 \leq 2x+1 \leq 5$ et $1 \leq x^2 \leq 4$, puis $7 \leq 3x^2+4 \leq 16$. Par quotient enfin, $\frac{3}{16} \leq \frac{2x+1}{3x^2+4} \leq \frac{5}{7}$.

Définition-théorème 19 – Valeurs absolues

- **Définition.** La *valeur absolue* d'un réel x , noté $|x|$, est le réel défini par

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ce réel est positif ou nul, et nul seulement si $x = 0$.

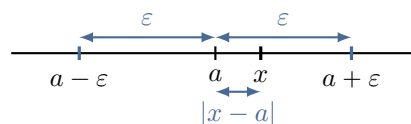
- **Interprétation géométrique.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ est la distance de x à 0 sur la droite réelle.
En particulier $-|x| \leq x \leq |x|$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'équivalence $|x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$.
- **Effet sur une somme ou un produit.** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
 - × $|x+y| \leq |x| + |y|$ (*inégalité triangulaire*) ;
 - × $|xy| = |x| \times |y|$, et en particulier $|x|^2 = x^2$.

Plus généralement, pour tous $x, a \in \mathbb{R}$, $|x-a|$ est la distance entre x et a . Ainsi, pour tous $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R}$,

$$|x-a| \leq \varepsilon \iff x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$$

et

$$|x-a| < \varepsilon \iff x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[.$$



[†]. La notion de *relation d'ordre* sera étudiée en détail au chapitre 10.

Exemple 20 – À retenir ! Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$ et $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$.

Exemple 21 – Une majoration à connaître Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Exemple 22 Écrire sans valeur absolue l'expression $f(x) = |x - 3| - |x + 7|$.

En effet, pour ce faire, on se ramène, via des études de signe, à des intervalles sur lesquels les expressions entre valeur absolue sont de signe constant. Or

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geq 3 \\ -(x - 3) & \text{si } x < 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad |x + 7| = \begin{cases} x + 7 & \text{si } x \geq -7 \\ -(x + 7) & \text{si } x < -7, \end{cases}$$

ce qui nous amène à distinguer trois intervalles $]-\infty, -7[$, $[-7, 3[$ et $[3, +\infty[$ – pour l'expression de f :

$$f(x) = \begin{cases} -(x - 3) - (-(x + 7)) & = 10 & \text{si } x < -7 \\ -(x - 3) - (x + 7) & = -2x - 4 & \text{si } -7 \leq x < 3 \\ (x - 3) - (x + 7) & = -10 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

 **En pratique**  Pour étudier une expression comportant des valeurs absolues, on se ramènera en général à des expressions sans valeur absolue sur divers intervalles.

Exemple 23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x - 4| < 2x + 10$.

Exemple 24 Pour tous $x, y \in]-1, 1[$, $\left| \frac{x + y}{1 + xy} \right| < 1$.

Définition-théorème 25 – Partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique ENTIER $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$, appelé la *partie entière de x* et noté $\lfloor x \rfloor$. Cet entier $\lfloor x \rfloor$ est donc le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x . En résumé :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Exemple 26 $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor 7,3 \rfloor = 7$, $\lfloor -8 \rfloor = -8$, MAIS ATTENTION $\lfloor -3,1 \rfloor = -4$ (et non pas -3 !).

4 Puissances et racines carrées

Définition-théorème 27 – Rappels sur les puissances entières

• **Définition.** Soit $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On appelle x *puissance n* , noté x^n , le nombre défini par $x^n = \underbrace{x \times \dots \times x}_{n \text{ facteurs}}$, avec $x^0 = 1$ par convention.

Si $x \neq 0$, on appelle x *puissance $-n$* , noté x^{-n} , le nombre défini par $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x} \times \dots \times \frac{1}{x}$ (n facteurs).

• **Règles de calculs.** Pour tous $x, y \in \mathbb{C}$ et $m, n \in \mathbb{N}$, $x^{m+n} = x^m x^n$, $x^{mn} = (x^m)^n$ et $(xy)^n = x^n y^n$.

Ces formules restent valables lorsque m (resp. n) est négatif à condition que x (resp. y) soit non nul.

Exemple 28 $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$, ainsi $(-1)^n$ dépend uniquement de la parité de l'entier n .

En particulier, $(-1)^{2n} = 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Définition-théorème 29 – Rappels sur les racines carrées

- **Définition.** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Il existe un unique réel positif r tel que $r^2 = x$. On l'appelle la *racine carrée* de x et on le note $\sqrt{x}$.
- **Effet sur une somme et un produit.** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$. MAIS $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
En outre $\sqrt{x^2} = |x|$.

✗ **ATTENTION ! ✗** La quantité x n'est définie que lorsque $x \geq 0$ et, par définition de la racine carrée, $(\sqrt{x})^2 = x$. La quantité $\sqrt{x^2}$, au contraire, est toujours définie, mais comme le passage au carré « tue » le signe de x , on a $\sqrt{x^2} = |x|$. Il faut donc retenir qu'en général $\sqrt{x^2} \neq x$.

Remarque 30 Il n'est pas inutile d'observer que les règles de calcul pour la racine carrée et les puissances sont analogues pour la multiplication et la division (nous verrons ultérieurement que $\sqrt{x} = x^{1/2}$ (cf. chapitre 5)) :

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \quad \text{vs} \quad (xy)^n = x^n y^n \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad \text{vs} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

et que ces opérations ne sont pas « compatibles » avec l'addition et la soustraction, au sens où en général :

$$\sqrt{x \pm y} \neq \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \quad \text{et} \quad (x \pm y)^n \neq x^n \pm y^n.$$

✗ **ATTENTION ! ✗**

$$\begin{array}{llll} \text{Pour tous } a, b, x, y \in \mathbb{R}, & ax = ay & \not\Rightarrow & x = y, & a^2 = b^2 & \not\Rightarrow & a = b, \\ \text{et pour } a \geq 0, & x^2 = a & \not\Rightarrow & x = \sqrt{a}. \end{array}$$

Ce sont là des erreurs graves, dont la correction repose sur la règle fondamentale suivante :

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est.

Il en découle les équivalences suivantes :

$$ax = ay \iff a(x - y) = 0 \iff a = 0 \text{ ou } x - y = 0 \iff a = 0 \text{ ou } x = y,$$

$$a^2 = b^2 \iff (a - b)(a + b) = 0 \iff a = b \text{ ou } a = -b \iff |a| = |b|,$$

et, si $a \geq 0$,

$$x^2 = a \iff (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0 \iff x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}.$$

Soit la version corrigée des règles erronées précédentes :

$$\begin{array}{llll} \text{Pour tous } a, b, x, y \in \mathbb{R}, & ax = ay & \iff & a = 0 \text{ ou } x = y, \\ & a^2 = b^2 & \iff & a = b \text{ ou } a = -b \iff |a| = |b|, \\ \text{et pour } a \geq 0, & x = \sqrt{a} & \iff & x^2 = a \text{ et } x \geq 0. \end{array}$$

Exemple 31 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x - 2| = 3|x + 1|$.

Exemple 32 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+5} = x - 1$.

✗ ATTENTION ! ✗

Pour tous $x, a \in \mathbb{R}$, $x \leq a \not\iff x^2 \leq a^2$ et $x^2 \leq a^2 \not\iff x \leq a$.

Ces implications sont fausses dans la mesure où la fonction carrée n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$, mais seulement sur $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$! Par exemple, $-2 \leq 1$ alors que $(-2)^2 > 1^2$ et $1 \leq (-2)^2$ alors que $1 > -2$. Ainsi

Comparer des nombres positifs (plus généralement de même signe) équivaut à comparer leurs carrés.

et on a donc plutôt :

Pour tous $a, x \in \mathbb{R}$, $x^2 \leq a^2 \iff |x| \leq |a|$,
 pour $x, a \geq 0$, $x \leq a \iff x^2 \leq a^2$,
 et pour $x \geq 0$ seulement, $x \leq a \iff x^2 \leq a^2$ et $a \geq 0$.

Exemple 33 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $|x - 1| \leq |2x + 1|$ et $|1 - x| \leq \frac{x}{2 - x}$.

Exemple 34 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leq x + 1$.

 **En pratique**  **(Simplification de l'argument d'un radical)** Pour simplifier (et normaliser) l'écriture de $\sqrt{n}$, avec $n \in \mathbb{N}$, on cherche le plus grand carré qui puisse être mis en facteur dans n , i.e. le plus grand entier naturel b tel que $n = ab^2$, avec $a \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sqrt{n} = \sqrt{ab^2} = \sqrt{b^2} \sqrt{a} = b\sqrt{a},$$

et l'argument a restant sous le radical est plus petit que n .

Exemple 35 $\sqrt{540} = 6\sqrt{15}$.

En effet, $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5 = \underbrace{2^2 \times 3^2}_{\substack{\text{puissances} \\ \text{d'exposant pair}}} \times 3 \times 5 = (2 \times 3)^2 \times 15 = 6^2 \times 15$.

Définition 36 – Quantité conjuguée

Soit x un réel et y un réel positif, on dit que $x - \sqrt{y}$ et $x + \sqrt{y}$ sont des *quantités conjuguées* l'une de l'autre.

Remarque 37 L'intérêt de la quantité conjuguée est liée à la troisième identité remarquable :

$$(x + \sqrt{y})(x - \sqrt{y}) = x^2 - (\sqrt{y})^2 = x^2 - y.$$

Ainsi la quantité conjuguée permet

- de simplifier des expressions en supprimant des sommes de radicaux d'un dénominateur ;
- de transformer la différence $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ de signe a priori quelconque en la différence $\frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ pour laquelle la somme $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est positive ; l'étude du signe de la quantité $x - y$ sans radical étant plus aisée.

Exemple 38 $\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{7}} = \frac{15 + 2\sqrt{21}}{47}$.

En effet, $\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}(5\sqrt{3} + 2\sqrt{7})}{(5\sqrt{3} - 2\sqrt{7})(5\sqrt{3} + 2\sqrt{7})} = \frac{5\sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{(5\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{7})^2} = \frac{5 \times 3 + 2\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{5^2 \sqrt{3}^2 - 2^2 \sqrt{7}^2} = \frac{15 + 2\sqrt{21}}{75 - 28} = \frac{15 + 2\sqrt{21}}{47}$.

5 Sommes

5.1 Définition

Définition 39 – Symbole $\sum$

Soit I un ensemble fini non vide et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes.

- On note $\sum_{i \in I} a_i$ la somme de tous les éléments de la famille $(a_i)_{i \in I}$ (lire « somme pour i parcourant I des a_i »).
Ainsi, si $I = \{i_1, \dots, i_n\}$, on a

$$\sum_{i \in I} a_i = a_{i_1} + \dots + a_{i_n}.$$

- Lorsque $I = \llbracket m, n \rrbracket$, avec $m \leq n$ deux entiers, la somme $\sum_{i \in \llbracket m, n \rrbracket} a_i$ sera notée $\sum_{i=m}^n a_i$ ou $\sum_{m \leq i \leq n} a_i$.
- Somme vide.* Par convention, lorsque I est vide, $\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0$.

Exemple 40

- Si $I = \{1, 5, 7, 13\}$, alors $\sum_{i \in I} a_i = a_1 + a_5 + a_7 + a_{13}$.
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$ et $\sum_{p=5}^{3n-1} \sqrt{p} = \sqrt{5} + \sqrt{6} + \dots + \sqrt{3n-2} + \sqrt{3n-1}$.
- Pour tout nombre complexe z et tous entiers m et n , avec $m \leq n$,

$$\sum_{k=m}^n z = \underbrace{z}_{k=m} + \underbrace{z}_{k=m+1} + \dots + \underbrace{z}_{k=n} = \underbrace{z + z + \dots + z}_{n-m+1 \text{ termes}} = (n - m + 1)z.$$

Règle pour les indices de sommes. Quelle lettre peut-on choisir pour l'écriture d'une somme à l'aide du symbole $\sum$? En cas de doute, il suffit simplement d'écrire *in extenso* cette somme, d'observer quelles variables apparaissent dans cette écriture et de choisir pour indice de sommation N'IMPORTE QUELLE AUTRE LETTRE.

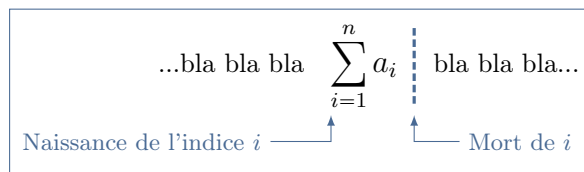
Par exemple, pour « $1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$ », on peut choisir n'importe quelle lettre : $\sum_{n=1}^{100} n^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2 = \sum_{p=1}^{100} p^2, \dots$

tandis que pour « $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ », la lettre « n » doit être exclue : $\sum_{n=1}^n n^2 \neq \sum_{i=1}^n i^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{p=1}^n p^2, \dots$

Doit-on utiliser des indices différents lorsque plusieurs sommes apparaissent dans un calcul? Que penser par exemple des écritures suivantes : $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$ et $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^n b_j$? Les deux sont convenables et symbolisent, en dépit des apparences, la même situation *in extenso* :

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n).$$

L'indice d'une somme a en réalité une zone d'influence très restreinte comme l'indique le schéma ci-contre. Un indice « mort » peut être recyclé à volonté. La seule chose à éviter est la schizophrénie : une même lettre possède plusieurs significations au même instant.



5.2 Manipulation du symbole $\sum$

L'extension des règles de calculs dans l'ensemble des nombres complexes, en l'occurrence la commutativité de l'addition et la distributivité de la multiplication sur l'addition, mène aux règles suivantes.

Théorème 41 – Linéarité du symbole $\sum$

Soit I un ensemble fini, $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de nombres complexes et α un complexe. On a

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} \alpha a_i = \alpha \sum_{i \in I} a_i.$$

α ne dépend pas de l'indice i , il peut donc être sorti de la zone d'influence de Σ .

Changement d'indice. Une même somme peut toujours être écrite de différentes manières, indépendamment du choix de la lettre-indice, et le passage d'une écriture à une autre est appelé *changement d'indice*. Deux exemples valent mieux qu'un long discours :

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n = \sum_{p=0}^{n-1} a_{p+1}$$

Changement d'indice $k = p + 1$, soit $p = k - 1$.

k	1	2	3	...	$n-1$	n
p	0	1	2	...	$n-2$	$n-1$

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{p=0}^n a_{n-p}$$

Changement d'indice $k = n - p$, soit $p = n - k$.

k	0	1	2	...	$n-1$	n
p	n	$n-1$	$n-2$	...	1	0

Pour n'importe quel changement d'indice, il faut toujours garantir que l'on a ni supprimé ni ajouté aucun terme à la somme initiale, mais juste modifié la façon de parcourir les éléments de la somme.

 **En pratique**  On se limitera à des changements d'indice de la forme $p = k + c$ ou $p = -k + c$, avec $c \in \mathbb{Z}$.

Sommes télescopiques. Il arrive fréquemment que lors d'une étape d'un calcul on aboutisse à une somme de la forme

« $\sum_{k=\dots}^{\dots} a_{k+1} - a_k$ », dite *somme télescopique*. Or ces sommes se simplifient extrêmement bien :

$$\sum_{k=m}^n a_{k+1} - a_k = \overbrace{(a_{n+1} - a_n)}^{\text{simplification}} + \overbrace{(a_n - a_{n-1})}^{\text{simplification}} + \overbrace{(a_{n-1} - a_{n-2})}^{\text{simplification}} + \dots + \overbrace{(a_{m+2} - a_{m+1})}^{\text{simplification}} + \overbrace{(a_{m+1} - a_m)}^{\text{simplification}} = a_{n+1} - a_m.$$

Théorème 42 – Simplification télescopique

Pour tous $a_m, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{C}$, avec $m \leq n$ deux entiers,
$$\sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m.$$

Démonstration. Récurrence sur l'entier n . ■

Exemple 43 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Théorème 44 – Identité de Bernoulli

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

En particulier, lorsque $b = 1$, $a^n - 1 = (a - 1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k$.

Démonstration. ... ■

Remarque 45 Cette identité est une généralisation de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ (cas $n = 2$).

Exemple 46 Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ impair,
$$a^n + b^n = (a + b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k.$$

5.3 Sommes de référence

Ce dernier paragraphe recense des formules concernant des sommes classiques qu'il est indispensable de connaître PAR CŒUR.

Théorème 47 – Somme d'entiers consécutifs, de leurs carrés et de leurs cubes[†]

Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, avec $m \leq n$,

$$\sum_{k=m}^n k = \frac{(m+n)(n-m+1)}{2}, \quad \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Dernier terme
Premier terme
Nombre de termes

Démonstration. ...

Remarque 48 Notons le lien entre la somme des cubes et celle des entiers consécutifs (cf. exercice 20) :

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2.$$

Théorème 49 – Sommes géométriques

Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, avec $m \leq n$, et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=m}^n z^k = \begin{cases} z^m \times \frac{z^{n-m+1} - 1}{z - 1} & \text{si } z \neq 1, \\ n - m + 1 & \text{si } z = 1. \end{cases}$$

Premier terme
Nombre de termes

Démonstration. ...

Exemple 50 Déterminer, pour tous $p \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n p^{2k}$.

6 Sommes doubles

Fréquemment, l'ensemble I indexant une somme est un ensemble de couples. Par exemple, si $K = \llbracket 0, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket = \{(i, j)\}_{0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, la somme $\sum_{k \in K} a_k$ sera plutôt notée $\sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j}$. D'ap-

arence peut-être plus compliquée, cette somme n'est jamais que celle des termes du tableau à double entrées ci-contre.

Que se passe-t-il par exemple quand on multiplie deux sommes $\sum_{i=1}^m a_i$ et $\sum_{j=1}^n b_j$? On obtient

en développant une somme de mn termes pouvant être écrite à l'aide d'un seul $\sum$:

$$\sum_{i=1}^m a_i \times \sum_{j=1}^n b_j = (a_1 + \dots + a_m)(b_1 + \dots + b_n) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + \dots + a_m b_{n-1} + a_m b_n = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_i b_j.$$

$j \backslash i$	1	2	...	n
0	$a_{0,1}$	$a_{0,2}$	...	$a_{0,n}$
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	...	$a_{1,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	...	$a_{m,n}$

[†]. Plus généralement, la *formule de Faulhaber* (Johann Faulhaber, 1580 à Ulm – 1635 à Ulm) énonce que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{q=0}^p \binom{p+1}{q} B_q n^{p+1-q},$$

où les nombres B_q , appelés *nombres de Bernoulli*, sont définis par $B_0 = 1$ et la relation de récurrence $\sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m+1}{i} B_i = 0$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Malgré sa dénomination, ladite formule a été établie dans toute sa généralité par Jacques Bernoulli (1654 à Bâle – 1705 à Bâle) dans son ouvrage *Ars Conjectandi*, Faulhaber ayant obtenu cette expression pour $p \leq 17$.

Théorème 51 – Produit de deux $\sum$

Pour tous $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$, avec $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^m a_i \times \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_i b_j.$$

Lu dans l'autre sens (de la droite vers la gauche), cette égalité exprime que si le terme général d'une somme double s'écrit comme un produit de deux facteurs, chacun ne dépendant que d'un des deux indices, alors la somme se factorise en un produit de deux sommes.

✗ ATTENTION ! ✗ Si l'on effectue le produit de deux sommes indexées sur le même ensemble, et pour lesquels le même indice est utilisé, il faut commencer par rendre les indices indépendants (les indices étant muets, changez l'un des deux afin d'avoir deux indices différents) :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \neq \sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i b_j.$$

Sommes doubles. La somme des termes d'un tableau à deux entrées peut être calculée en sommant par paquets d'abord sur les lignes ou d'abord sur les colonnes.

Somme des termes d'un tableau carré :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j} \text{ aussi notée } \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}.$$

$j \backslash i$	1	2	...	n
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	...	$a_{1,n}$
2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	...	$a_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	...	$a_{n,n}$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \sum_{j=1}^n a_{1,j} \\ \rightarrow \sum_{j=1}^n a_{2,j} \\ \vdots \\ \rightarrow \sum_{j=1}^n a_{n,j} \end{array} \right\} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n a_{i,1} \\ \sum_{i=1}^n a_{i,2} \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^n a_{i,n} \end{array} \right\} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j}$$

Somme des termes d'un tableau triangulaire avec diagonale :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}.$$

$j \backslash i$	1	2	...	n
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	...	$a_{1,n}$
2		$a_{2,2}$	...	$a_{2,n}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$
n				$a_{n,n}$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \sum_{j=1}^n a_{1,j} \\ \rightarrow \sum_{j=2}^n a_{2,j} \\ \vdots \\ \rightarrow \sum_{j=n}^n a_{n,j} \end{array} \right\} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^1 a_{i,1} \\ \sum_{i=1}^2 a_{i,2} \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^n a_{i,n} \end{array} \right\} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j}$$

On traite de la même façon les sommes de la forme $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}$ (tableau triangulaire sans diagonale).

Théorème 52 – Permutation des $\sum$

Pour toute famille $(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ de nombres complexes, avec $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j}, \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j}, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}.$$

En pratique Pour la permutation des sommes doubles « triangulaires », il est vivement conseillé d'utiliser les expressions intermédiaires $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$ et $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}$, plutôt que de chercher à retenir les formules précédentes, en remarquant qu'il s'agit à chaque fois d'interpréter une double inégalité. Par exemple :

$$1 \leq i \leq j \leq n \iff \begin{cases} 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq j \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ i \leq j \leq n. \end{cases}$$

En pratique Pour les calculs de sommes doubles, on peut retenir l'idée suivante :

Quand on ne sait pas quoi faire de deux sommes emboîtées « $\sum_i \sum_j a_{i,j}$ », on peut toujours essayer de les permuter !

Exemple 53 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j} = n$.

Les sommes de la forme $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}$ sont plus courantes qu'il n'y paraît, on les rencontre par exemple naturellement quand on calcule le carré d'une somme. Le calcul qui suit repose essentiellement sur l'idée que le tableau ci-contre est symétrique par rapport à sa diagonale.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k \times \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j = \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i < j}} a_i a_j}_{\text{Termes au-dessus de la diagonale}} + \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i = j}} a_i a_j}_{\text{Termes diagonaux}} + \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i > j}} a_i a_j}_{\text{Termes au-dessous de la diagonale}} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \end{aligned}$$

$i \backslash j$	1	2	...	n
1	a_1^2	$a_1 a_2$	...	$a_1 a_n$
2	$a_2 a_1$	a_2^2	...	$a_2 a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$a_n a_1$	$a_n a_2$	...	a_n^2

Exemple 54 $(a+b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab$ et $(a+b+c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + ac + bc)$.

Théorème 55 – Carré d'un $\sum$

Pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j.$$

Doubles produits

7 Produits

Nous passerons sur les produits plus vite que sur les sommes - il s'agit essentiellement de la même chose !

Définition 56 – Produit

Pour toute famille $(a_i)_{i \in I}$ de nombres réels ou complexes indexée par un ensemble FINI et non vide I , le produit de tous les nombres a_i , i décrivant I , sera noté $\prod_{i \in I} a_i$. Par convention, lorsque I est vide, $\prod_{i \in \emptyset} a_i = 1$.

Exemple 57 Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tous entiers m et n , avec $m \leq n$,

$$\prod_{i=m}^n z = \overbrace{z \times z \times \dots \times z}^{n-m+1 \text{ facteurs}} = z^{n-m+1}.$$

Définition 58 – Factorielle

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *factorielle* n et on note $n!$ l'entier $n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$.

Par convention $0! = 1$. **Relation de récurrence.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n \times (n-1)!$.

Exemple 59 $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$ et $7! = 5040$.

Exemple 60 $n^n = \prod_{k=1}^n n = \overbrace{n \times n \times \dots \times n}^{n \text{ facteurs}}$ à ne pas confondre avec $n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$.

Exemple 61 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k \times k! = (n+1)! - 1$.

✗ **ATTENTION ! ✗** Contrairement au symbole $\sum$, le symbole $\prod$ n'est pas linéaire. L'analogue du théorème 41 est donné par le résultat suivant.

Théorème 62 – Règles de calculs pour $\prod$

Soit I un ensemble fini, $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de nombres complexes, p et q des entiers, et α un complexe. On a

$$\prod_{i \in I} (a_i^p b_i^q) = \left(\prod_{i \in I} a_i \right)^p \left(\prod_{i \in I} b_i \right)^q \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I} \alpha a_i = \alpha^{\overbrace{\text{Card}(I)}^{\text{Nombre de facteurs}}} \prod_{i \in I} a_i.$$

Exemple 63 – Deux produits classiques ! Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^n 2k = 2^n n!$ et $\prod_{k=1}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

Théorème 64 – Simplification télescopique

Pour tous $a_m, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{C}^*$, avec $m \leq n$, $\prod_{i=m}^n \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$.

Théorème 65 – Permutation des $\prod$

Pour toute famille $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de nombres complexes, avec $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n a_{i,j} = \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n a_{i,j}, \quad \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^j a_{i,j} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=i}^n a_{i,j}, \quad \prod_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \prod_{j=2}^n \prod_{i=1}^{j-1} a_{i,j} = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n a_{i,j}.$$

Exemple 66 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{1 \leq i,j \leq n} (ij^2) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (ij^2) = \prod_{i=1}^n \left(i^n \left(\prod_{j=1}^n j \right)^2 \right) = \prod_{i=1}^n (i^n n!^2) = \left(\prod_{i=1}^n i \right)^n \times (n!^2)^n = n!^n \times n!^{2n} = n!^{3n}.$$

8 Coefficients binomiaux

8.1 Définition et propriétés

En Première, on vous a donné une définition des coefficients binomiaux dans un contexte probabiliste, en lien avec le comptage de chemins dans certains arbres. On adopte ici une présentation différente et a priori plus féconde.

Définition 67 – Coefficients binomiaux

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on appelle (*coefficient binomial*) k parmi n , noté $\binom{n}{k}$, le nombre

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $0 \leq k \leq n$, après simplification des factorielles, on a aussi : $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Théorème 68 – Propriétés des coefficients binomiaux

(i) **Symétrie.** Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(ii) **Formule comité-président.** Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

(iii) **Formule de Pascal.[†]** Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

(iv) **Intégralité.** Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.

Démonstration. ...

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						

Triangle de Pascal

Symétrie

Formule de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$
Exemple 69 – Une identité classique

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \binom{p+k}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$.

8.2 Formule du binôme**Théorème 70 – Formule du binôme**

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Démonstration. ... ■

Exemple 71 Concernant les coefficients, on reconnaîtra les premières lignes du triangle de Pascal :

n	binôme	coefficients
2	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
3	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
4	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1
5	$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	1 5 10 10 5 1

Exemple 72 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$

En effet, il suffit d'appliquer la formule du binôme avec $(a, b) = (1, 1)$ et $(a, b) = (-1, 1)$ respectivement :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n 1^k \times 1^{n-k} \times \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \times 1^{n-k} \times \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0^n.$$

Exemple 73 Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} z^k = nz(z+1)^{n-1}$.

Exemple 74 – Inégalité de Bernoulli. Pour tous $x > 0$ et $n \geq 2$, $(1+x)^n > 1+nx$.

†. Blaise Pascal (1623 à Clermont – 1662 à Paris) est un mathématicien, physicien, inventeur, philosophe et théologien français.

Compétences à acquérir

- Manipulation des valeurs absolues : exercices 6, 8, 10 et 11.
- Manipulation des puissances et des racines carrées : exercices 1, 2, 6 à 8,
- Manipulation des sommes :
 - × Sommes de référence : exercices 14 à 16 et 18 ;
 - × Changement d'indice : exercices 17 et 19 ;
 - × Simplification télescopique : exercices 21 à 24 ;
 - × Sommes doubles : exercices 25, 27 et 28.
- Manipulation des produits : exercices 29 et 34 à 38.
- Manipulation des factorielles : exercices 29 à 32.
- Manipulation des coefficients binomiaux : exercices 39, 40, et 42 à 45.
- Utilisation de la formule du binôme : exercices 41 à 43.

Quelques résultats classiques.

- Exprimer le maximum et le minimum de deux réels à l'aide d'une valeur absolue (exemple 20).
- Deux inégalités (exemples 21 et 74).
- Produits des entiers consécutifs pairs/impairs (exemple 63).
- Sommes de coefficients binomiaux (exemples 69 et 72).
- Calcul de sommes géométriques dérivées (exercice 25).