19 | Dérivabilité

Dans ce chapitre, les lettres D et E désignent des parties quelconques de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

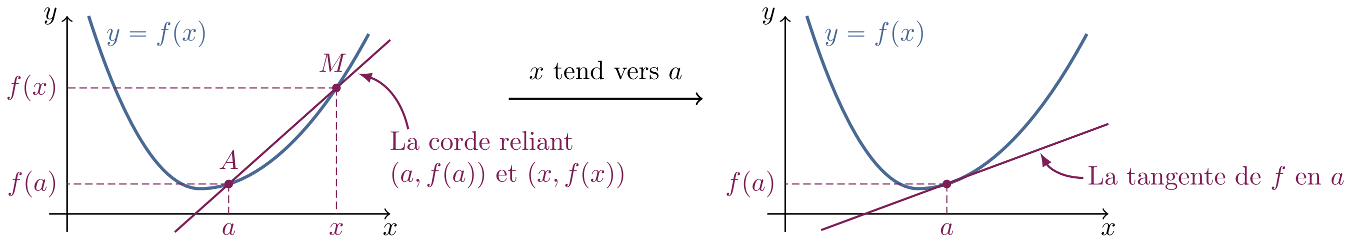
1 Définitions et premières propriétés

1.1 Dérivabilité

Définition 1 – Dérivabilité en un point/sur une partie de $\mathbb{R}$, nombre dérivé, dérivée

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

- Soit $a \in D$. La fonction f est dite *dérivable en a* lorsque la limite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ EXISTE ET EST FINIE.
  Le cas échéant, cette limite est appelé le *nombre dérivé de f en a* et est notée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.
- La fonction f est dite *dérivable sur D* lorsque f est dérivable en tout point de D. Le cas échéant, la fonction $x \longmapsto f'(x)$ est appelée la *dérivée de f* et notée f' ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
  On note $\mathscr{D}(D,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.



Interprétation graphique du nombre dérivé. On reprend les notations de la définition 1, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f et A et M les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et x. Le taux d'accroissement de f entre a et x est alors la pente de la droite (AM). Si f est dérivable en a, lorsque x tend vers a, le point M tend vers le point A en se déplaçant sur la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite (AM) tend vers une droite limite tangente à la courbe.

Définition 2 – Tangente à la courbe

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$.

- Si f est dérivable en a, la *tangente à la courbe de f en a* est la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est appelée la *tangente (verticale) à la courbe de f en a*.

Au voisinage de a, la tangente en a ressemble beaucoup à la courbe de f, on dit que la tangente est une *approximation affine* de la courbe de f au voisinage du point d'abscisse a. Cette idée sera formalisée au chapitre 24. Dans l'immédiat précisons l'information apportée par cette approximation affine.

Supposons f dérivable en a et définie au voisinage à gauche et à droite de a et considérons deux réels α et β vérifiant $\alpha < f'(a) < \beta$, alors

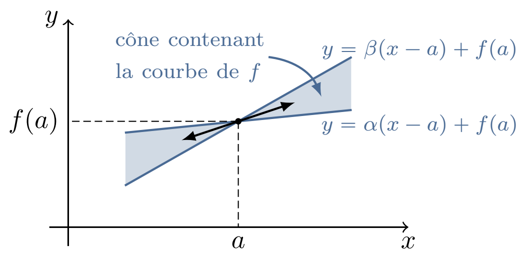
$$\alpha < \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \beta$$

et il existe donc un réel $\eta > 0$ (théorème 14 du chapitre 16) tel que

$$\forall x \in \left]a-\eta\,, a+\eta\right[\setminus\{a\}, \quad \alpha < \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \beta$$

soit

$$\begin{cases} \forall x \in \left]a\,, a+\eta\right[, & \alpha(x-a)+f(a) < f(x) < \beta(x-a)+f(a) \\ \forall x \in \left]a-\eta\,, a\right[, & \beta(x-a)+f(a) < f(x) < \alpha(x-a)+f(a). \end{cases}$$



Exemple 3 Si f est définie sur $[0\,,1]$ et dérivable en 0 avec $f(0) = 0$ et $f'(0) > 0$, alors f est strictement positive au voisinage à droite de 0.

Exemple 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction puissance $x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \longmapsto nx^{n-1}$.

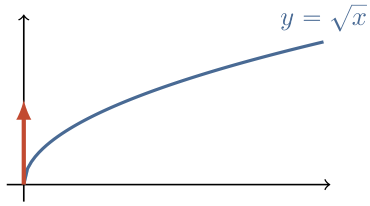
En effet, soit $a \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{a\}$, $\quad \dfrac{x^n - a^n}{x-a} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-k-1} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-k-1} = na^{n-1}$.

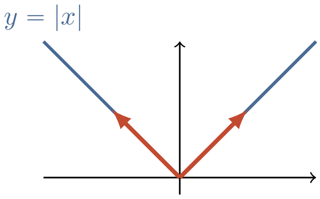
Remarque 5 Via le changement de variable $h = x - a$, la dérivabilité de f en a équivaut à l'existence d'une limite finie en 0 du taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Exemple 6 La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 et sa courbe admet une demi-tangente verticale en 0.

En effet, pour tout $h > 0$, le taux d'accroissement entre 0 et $0 + h$ est

$$\frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$





Exemple 7 La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$ ainsi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1.$$

Théorème 8 – Lien entre dérivabilité et continuité

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et $a \in D$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration. Puisque f est dérivable en a, $\quad f(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) + f(a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$, $\quad$ par opérations. ∎

✖ **Attention !** ✖ La réciproque du résultat précédent est évidemment fausse ! Comme l'indiquent les fonctions racine carrée et valeur absolue qui sont continues mais non dérivables en 0 (cf. exemples 6 et 7).†

Le théorème suivant est une simple déclinaison d'un résultat analogue obtenu pour les limites (théorème 55 du chapitre 16).

Théorème 9 – Caractérisation de la dérivabilité via les parties réelle et imaginaire

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$. La fonction f est dérivable en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. En outre, le cas échant, $\quad f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + i\,\mathrm{Im}(f)'(a)$.

1.2 Dérivabilité à gauche/à droite

Définition 10 – Dérivabilité à gauche/à droite

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$. On suppose f définie au voisinage de a à gauche et à droite.

- f est dite *dérivable à gauche en a* lorsque $f|_{D\cap]-\infty,a]}$ est dérivable en a, *i.e.* lorsque $\displaystyle\lim_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Le cas échéant, cette limite est appelée le *nombre dérivé à gauche de f en a* et est notée $f'_g(a)$.
- f est dite *dérivable à droite en a* lorsque $f|_{D\cap[a,+\infty[}$ est dérivable en a, *i.e.* lorsque $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Le cas échéant, cette limite est appelée le *nombre dérivé à droite de f en a* et est notée $f'_d(a)$.

Puisqu'elle n'est qu'un cas particulier de la dérivabilité en général, la dérivabilité à gauche (resp. à droite) implique la continuité à gauche (resp. à droite). En particulier, si une fonction admet en a une dérivée à gauche et une dérivée à droite, alors elle est continue en a.

†. Pire, il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ mais dérivables nulle part ! À l'instar des fonctions de Weierstrass (1872)

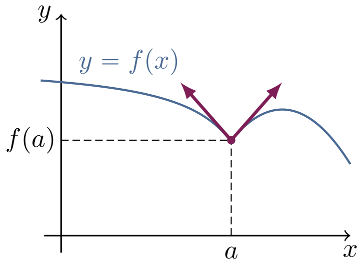
$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \qquad \text{avec } 0 < a < 1 \text{ et } ab \geqslant 1.$$

Un autre exemple est donnée par la *fonction de Takagi* : $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s(2^n x)}{2^n}$, où $s(x) = \min_{k\in\mathbb{Z}} |x - k|$.

Il existe bien sûr un lien entre dérivabilité en a et dérivabilité à gauche et à droite en a, comme le précise la proposition suivante, qui résulte naturellement du lien entre limite en a et limite à gauche et à droite en a pour une fonction non définie en a.

Théorème 11 – Caractérisation de la dérivabilité via les dérivabilités à gauche et à droite

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$. On suppose f définie au voisinage de a à gauche et à droite.
La fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a ET si $f'_g(a) = f'_d(a)$.

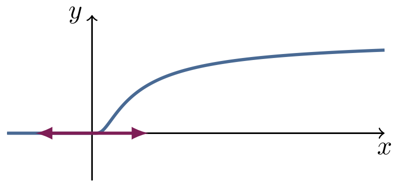


Ci-contre f est dérivable à gauche et à droite en a - sa courbe admet ainsi des demi-tangentes à gauche et à droite en a - mais pas en a, car $f'_g(a) \neq f'_d(a)$.

Exemple 12 La fonction valeur absolue $|\cdot|$ est dérivable à gauche et à droite en 0, mais n'est pas dérivable en 0, puisque $|\cdot|'_g(0) = -1 \neq 1 = |\cdot|'_d(0)$ (cf. exemple 7).

Exemple 13 La fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ est dérivable en 0.

En effet, $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$, ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.



1.3 Dérivabilité par opérations

Théorème 14 – Opérations sur la dérivabilité

Soit $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions et $a \in D$. On suppose f et g dérivables en a.

(i) Combinaison linéaire. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$. *(Linéarité de la dérivation).*

(ii) Produit. Le produit fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(iii) Quotient. Si $g(a) \neq 0$, alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions telles que $f[D] \subset E$ et $a \in D$.

(iv) Composition. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)\, g'(f(a)).$$

Ces assertions restent valables en remplaçant « dérivable en a » par « dérivable sur D ».

Démonstration. ... ■

Corollaire 15

Les fonctions polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et les fonctions rationnelles sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs.

Exemple 16 La fonction $x \longmapsto \sqrt{x^3 \sin x}$ est dérivable sur $]-\pi\,,\pi[$.

Exemple 17 La fonction $x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x(1-x)}\right)$ est définie sur $]0\,,1]$ et dérivable sur $]0\,,1[$.

Remarque 18 La règle de dérivation pour une composée de fonctions est primordiale, dans la mesure où elle est à la base de la dérivation des composées du type $\sqrt{u}$, e^u, $\ln u$, u^α, ... où u est une fonction.

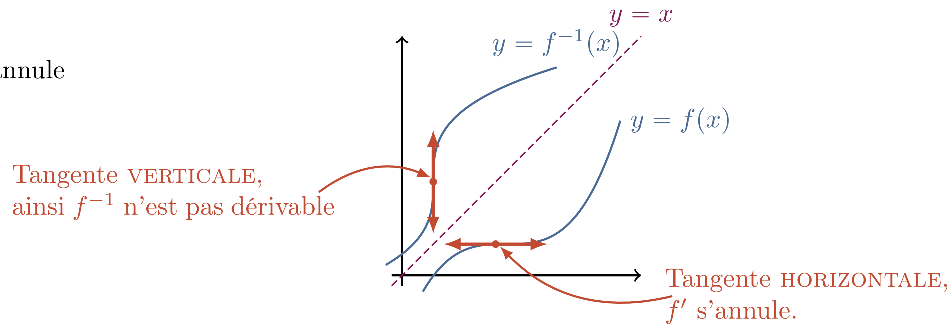
Théorème 19 – Dérivabilité d'une réciproque

Soit I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur l'intervalle $J = f[I]$.
Si f' NE S'ANNULE PAS SUR I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Démonstration. Cf. annexe A. ■

✖ ATTENTION ! ✖

L'hypothèse selon laquelle f' ne s'annule pas est essentielle !



Remarque 20 La formule $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ peut être retrouvée rapidement en dérivant la relation $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J$:

$$1 = (\mathrm{Id}_J)' = \left(f \circ f^{-1}\right)' = \left(f^{-1}\right)' \times f' \circ f^{-1}.$$

1.4 Dérivées successives

Définition 21 – Dérivées successives et fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On définit les *dérivées successives de f sur D* par récurrence :

$$f^{(0)} = f \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ si } f^{(k)} \text{ est définie et dérivable sur } I, \text{ alors } f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'.$$

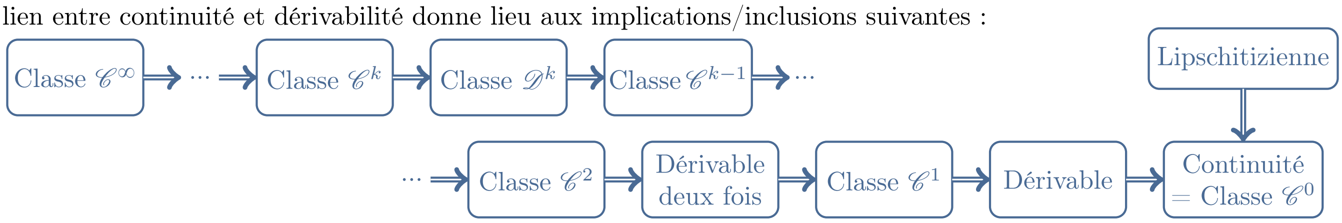
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Lorsqu'elle est définie, la fonction $f^{(k)}$, aussi notée $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$, est appelée fonction *dérivée k^e (ou d'ordre k) de f sur D* et la fonction f est dite *k fois dérivable sur D*.
  On note $\mathscr{D}^k(D, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- La fonction f est dite *de classe $\mathscr{C}^k$ sur D* lorsque f est k fois dérivable sur D et lorsque sa dérivée k^e $f^{(k)}$ est continue sur D. On note $\mathscr{C}^k(D, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  En particulier, $\mathscr{C}^0(D, \mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions continues sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- La fonction f est dite *de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D* lorsque f est dérivable autant de fois que l'on veut sur D.
  L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{C}^\infty(D, \mathbb{K})$. On a donc

$$\mathscr{C}^\infty(D, \mathbb{K}) = \bigcap_{k \geqslant 0} \mathscr{C}^k(D, \mathbb{K}) = \bigcap_{k \geqslant 1} \mathscr{D}^k(D, \mathbb{K}).$$

✖ ATTENTION ! ✖ Être de classe $\mathscr{C}^1$, ce n'est pas être « dérivable et continue » – on est toujours continue lorsque l'on est dérivable – mais être « dérivable de dérivée continue ».

Le lien entre continuité et dérivabilité donne lieu aux implications/inclusions suivantes :



En outre, si $f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{K})$ avec $k \geqslant 1$, alors $f' \in \mathscr{C}^{k-1}(I, \mathbb{K})$ et $F \in \mathscr{C}^{k+1}(I, \mathbb{K})$, où F désigne une primitive de f sur I.

Exemple 22

- $\exp \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)} = \exp$.
- Les fonctions usuelles du chapitre 5 sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leurs domaines de dérivabilité respectifs.

À l'instar des fonctions dérivables, on dispose de règles opératoires pour la dérivabilité (ou la classe) à l'ordre k.

Théorème 23 – Opérations sur les dérivées successives

Soit $k \in \mathbb{N}$.

(i) Combinaison linéaire, produit, quotient. Pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{C})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{C})$, $fg \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{C})$ et, si g ne s'annule pas sur D, $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{C})$. Par ailleurs,

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)} \qquad \text{et} \qquad (fg)^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p)} \quad \textit{(formule de Leibniz}^{\dagger}\textit{)}.$$

(ii) Composition. Si $f \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R})$, $g \in \mathscr{C}^k(E, \mathbb{C})$ et si $f[D] \subset E$, alors $g \circ f \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{C})$.[‡]

(iii) Réciproque. Soit I un intervalle. Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur l'intervalle $J = f[I]$, SI f' NE S'ANNULE PAS SUR I, alors $f^{-1} \in \mathscr{C}^k(J, \mathbb{R})$.

On peut remplacer dans chacune de ces assertions « $\mathscr{C}^k$ » par « $\mathscr{D}^k$ » ou « $\mathscr{C}^\infty$ ».

Démonstration. Cf. annexe A. ■

Exemple 24

- Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En outre, si f est une fonction polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $k > n$, $f^{(k)} = 0$.
- Les fonctions rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition respectifs.

✎ **En pratique** ✎ Pour montrer qu'une fonction est deux fois dérivable, on cherchera en priorité à appliquer le théorème précédent. On ne s'amuse pas à montrer qu'elle est dérivable, à la dériver, puis à montrer que sa dérivée est à nouveau dérivable !

Exemple 25 Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x+\alpha}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-\alpha\}$ et admet $x \longmapsto \dfrac{(-1)^n n!}{(x+\alpha)^{n+1}}$ pour dérivée n^{e}, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 26 La fonction $f : x \longmapsto x^2\,\mathrm{e}^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)} : x \longmapsto \big(x^2 + 2nx + n(n-1)\big)\,\mathrm{e}^x\,.$$

2 Informations déduites de la dérivée d'une fonction

✖ **ATTENTION !** ✖ À l'exception notable du théorème 36, les résultats des paragraphes 2.1 à 2.3 ne concernent que les fonctions à valeurs RÉELLES.

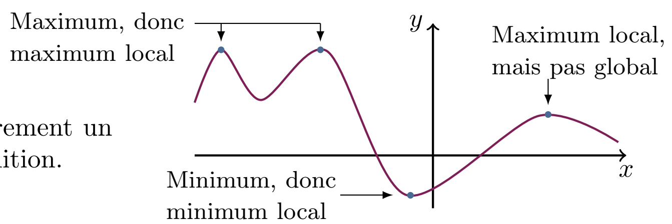
2.1 Extrema locaux d'une fonction dérivable

Définition 27 – Extremum local et point critique

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$.

- On dit que f admet un *maximum (resp. minimum) local en a* lorsque f est majorée (resp. minorée) par $f(a)$ au voisinage de a.
- On dit que a est un *point critique de f* lorsque f est dérivable en a avec $f'(a) = 0$.

Remarque 28 Un maximum local n'est pas nécessairement un maximum de la fonction sur tout son domaine de définition.

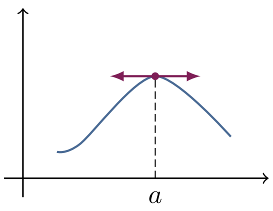


✖ **Attention !** ✖ Une fonction peut admettre un extremum local en un point sans être monotone à gauche et monotone à droite au voisinage de ce point (cf. exercice 1).

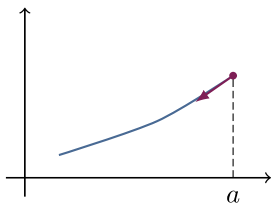
Théorème 29 – Condition nécessaire pour un extremum local en un point intérieur

Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et a un point INTÉRIEUR de I. Si f est dérivable en a et possède un extremum local en a, alors a est un point critique de f.

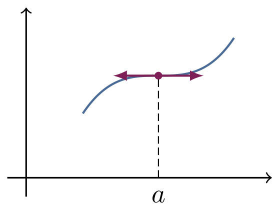
Démonstration. ... ■



Situation standard du théorème (cas d'un maximum local).



Il est crucial de ne pas se situer en une extrémité de I.



Réciproque fausse : tout point critique n'est pas un extremum local.

✖ **Attention !** ✖ La condition précédente n'est pas suffisante, comme le suggère la dernière figure ci-dessus et l'exemple de la fonction cube $x \longmapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée s'annule en 0 mais qui n'admet pas d'extremum local en ce point. Pour une condition suffisante, on se reportera au théorème 39.

2.2 Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis

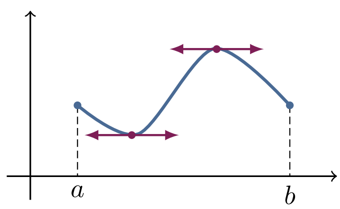
Théorème 30 – Théorème de Rolle§

Si $f : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a\,,b]$, dérivable sur $]a\,,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel $c \in\,]a\,,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. ... ■

Remarque 31

- Le théorème de Rolle est un théorème d'existence, pas d'unicité. Graphiquement, il affirme que la courbe représentative de f possède au moins une tangente horizontale.
- En cinématique, le théorème de Rolle implique qu'un point mobile sur un axe qui revient à son point de départ a vu sa vitesse s'annuler à un instant donné.



Exemple 32 Soit $f \in \mathscr{C}^3([a\,,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$. Alors il existe un réel $c \in\,]a\,,b[$ tel que $f^{(3)}(c) = 0$.

✖ **Attention !** ✖ Le théorème de Rolle est faux pour les fonctions à valeurs complexes.
Un contre-exemple est fourni par la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{it}$: cette fonction est dérivable sur $[0\,,2\pi]$ et vérifie $\mathrm{e}^{i0} = \mathrm{e}^{2i\pi} = 1$, mais sa dérivée $t \longmapsto i\,\mathrm{e}^{it}$ ne s'annule pas sur $[0\,,2\pi]$.

†. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 à Leipzig – 1716 Hanovre) est un philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand. On lui attribue généralement, avec Isaac Newton, l'invention du calcul infinitésimal.

‡. La formule de Faà di Bruno (mathématicien italien (1825 – 1888)) généralise la règle de dérivation des fonctions composées au cas des dérivées d'ordre supérieur : $(g \circ f)^{(k)} = \displaystyle\sum_{\substack{(m_1,\dots,m_k)\in\mathbb{N}^k \\ 1m_1+2m_2+\dots+km_k=k}} \frac{k!}{m_1!m_2!\cdots m_k!} \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{f^{(j)}}{j!}\right)^{m_j} \times g^{(m_1+\dots+m_k)} \circ f$.

§. Michel Rolle (1652 à Ambert – 1719 à Paris) est un mathématicien français connu pour avoir établi, dans le cas particulier des fonctions polynomiales réelles, le théorème qui porte aujourd'hui son nom.

Une généralisation majeure du théorème de Rolle est l'égalité des accroissements finis.

Théorème 33 – Théorème des accroissements finis

Si $f : [a\,, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a\,, b]$ et dérivable sur $]a\,, b[$, alors il existe un réel $c \in\,]a\,, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction $x \longmapsto f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. ∎

L'interprétation de l'égalité des accroissements finis est la suivante :

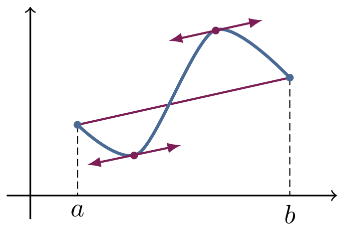
Si j'ai des informations sur f', j'en ai aussi sur f.

Typiquement, toute majoration/minoration de f' peut être convertie en une majoration/minoration liée à f.

Exemple 34 Pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Remarque 35

- Graphiquement, la formule des accroissements finis affirme qu'il existe au moins une tangente à la courbe représentative de f qui soit parallèle à la droite passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.
- En cinématique, la formule des accroissements finis implique que si une voiture réalise un parcours à la vitesse moyenne de 90 km/h, alors il existe un instant du trajet en lequel sa vitesse instantanée aura été de 90 km/h.



2.3 Constance, monotonie et dérivabilité

Théorème 36 – Caractérisation des fonctions constantes dérivables

Soit I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{C})$, $\quad f$ est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

Démonstration. ... ∎

Théorème 37 – Caractérisation des fonctions monotones dérivables

Soit I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$.

(i) La fonction f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.

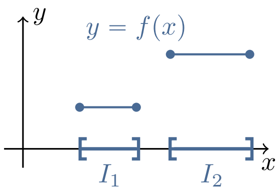
(ii) La fonction f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a\,, b]$ avec $a < b$.
En particulier, si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.

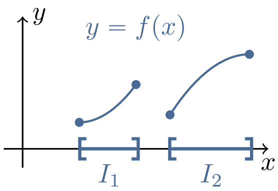
Des résultats similaires valent pour la décroissance.

Démonstration. ... ∎

✖ **Attention !** ✖ Dans les deux théorèmes précédents, l'hypothèse selon laquelle I est un intervalle est cruciale. Ces théorèmes sont faux dès que I est une réunion d'intervalles disjoints.

f est constante sur I_1 et I_2, ainsi $f' = 0$ sur $I_1 \cup I_2$, mais f n'est pas constante sur $I_1 \cup I_2$.





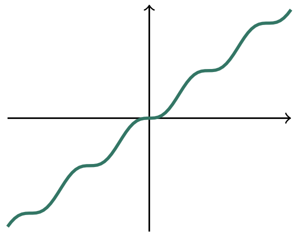
f est croissante sur I_1 et I_2, ainsi $f' \geqslant 0$ sur $I_1 \cup I_2$, mais f n'est pas croissante sur $I_1 \cup I_2$.

Par ailleurs, on peut avoir $f'(a) > 0$ en un point a sans que la fonction f soit strictement croissante au voisinage de a (cf. exercice 1).

Pour prévenir d'éventuels drames, on se limitera essentiellement à parler de monotonie sur des INTERVALLES de $\mathbb{R}$.

Exemple 38 La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En effet, par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \cos x$. Ainsi $f' \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ et f' s'annule sur l'ensemble $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, qui ne contient aucun intervalle de la forme $[a\,,b]$ avec $a < b$.



Terminons ce paragraphe avec une condition suffisante en lien avec la dérivée pour l'existence d'un extremum.

Théorème 39 – Condition suffisante pour un extremum local en un point intérieur

Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et a un point intérieur de I. Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a.

Démonstration. Quite à changer f en $-f$, il existe un voisinage $]a-\eta\,,a+\eta[$ de a dans I, avec $\eta > 0$, tel que $f' \leqslant 0$ sur $]a-\eta\,,a]$ et $f' \geqslant 0$ sur $[a\,,a+\eta[$. Alors f est décroissante sur $]a-\eta\,,a]$, ainsi $f \geqslant f(a)$ sur $]a-\eta\,,a]$, et f est croissante sur $[a\,,a+\eta[$, ainsi $f \geqslant f(a)$ sur $[a\,,a+\eta[$. Finalement f admet un minimum local en a. ■

Exemple 40 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$ admet des extrema locaux en -1 et 1.

2.4 Inégalité des accroissements finis et fonctions lipschitziennes

Théorème 41 – Inégalité des accroissements finis

Soit I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{C})$. S'il existe un réel positif k tel que $|f'(x)| \leqslant k$, pour tout $x \in I$, alors f est k-lipschitzienne sur I.

Démonstration. ... ■

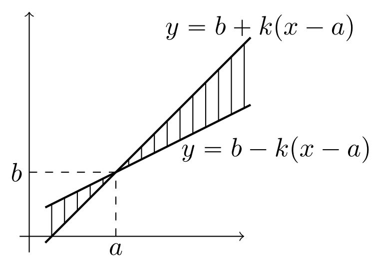
Exemple 42

- Les fonctions sinus et cosinus sont 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, leurs dérivées respectives étant bornées par 1. En particulier,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leqslant |x|.$$
- Si $f \in \mathscr{C}^1([a\,,b], \mathbb{C})$, alors f est lipschitzienne de rapport $\max\limits_{[a,b]} |f'|$ sur $[a\,,b]$.

  En effet, f' est continue sur le segment $[a\,,b]$, par hypothèse, et y est donc bornée en atteignant ses bornes, d'après le théorème des bornes atteintes.

Remarque 43

- Rappelons qu'une fonction peut-être lipschitzienne et non dérivable (par exemple $x \longmapsto |x|$).
- En revanche, si f est une fonction dérivable et k-lipschitzienne sur l'intervalle I, alors, pour tout $x \in I$, on a
$$\forall t \in I \setminus \{x\}, \quad \left|\frac{f(t) - f(x)}{t - x}\right| \leqslant k$$
et il vient, par passage à la limite selon $t \to x$, $|f'(x)| \leqslant k$. Ainsi $|f'|$ est majorée par k sur I.
- Graphiquement, si f est dérivable sur I et de dérivée f' bornée par k, alors, pour tout abscisse $a \in I$, la courbe de f se situe entre les droites d'équations $y = f(a) \pm k(x-a)$.



2.5 Une condition suffisante de dérivabilité en un point

Commençons par rappeler que les limites

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} f'(x)$$

sont conceptuellement très différentes. La première est liée à la dérivabilité de la fonction f en a, tandis que la seconde est liée à la continuité de la dérivée f' en a. Dans l'énoncé suivant, la notation $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x)$ désigne la limite en a de la restriction de f' à $I \backslash \{a\}$.

Théorème 44 – Théorème de la limite de la dérivée

Soit I un intervalle, $a \in I$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si la fonction f est continue sur I, dérivable sur $I \backslash \{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell$, alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell.$$

En particulier, si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a (donc sur I) et f' est continue en a.

Démonstration. … ■

✖ **Attention !** ✖ Le théorème précédent énonce seulement une condition suffisante pour établir l'existence du nombre dérivé en a. Il se peut que $f'(a)$ existe sans que $f'|_{I \backslash \{a\}}$ ait une limite en a (cf. question 2 de l'exercice 1).

Exemple 45 La fonction $x \longmapsto \text{Arcsin}\big(1 - x^4\big)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1\,,1]$.

Compétences à acquérir

- Étudier et exploiter la dérivabilité d'une fonction : exercices 2 à 4.
- Calculer des dérivées successives : exercices 8 et 10 à 12.
- Utiliser le théorème de Rolle : exercices 15 à 17, 21 et 27 à 30.
- Utiliser les accroissements finis : exercices 13 et 14, 23 à 25.
- Utiliser le théorème de la limite de la dérivée : exercices 38 à 39.

Quelques résultats classiques :

- Extension du théorème de Rolle (exercice 20).
- Théorème de Darboux (exercice 26).
- Point fixe répulsif pour une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ (exercice 34).

A Démonstrations

Preuve du théorème 19. Soit $b \in J$.

- Puisque f est dérivable en $f^{-1}(b)$, $\lim\limits_{x \to f^{-1}(b)} \dfrac{f(x) - f\big(f^{-1}(b)\big)}{x - f^{-1}(b)} = f'\big(f^{-1}(b)\big)$ et, par passage à l'inverse (f' ne s'annulant pas par hypothèse),
$$\lim_{x \to f^{-1}(b)} \frac{x - f^{-1}(b)}{f(x) - f(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$
- En outre, puisque f est continue et bijective, f^{-1} est continue en b, soit $\lim\limits_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$. On a alors,
$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))},$$
par composition des limites.

Preuve du théorème 23. Les théorèmes opératoires 14 et 19 se généralisent aux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, via les règles opératoires sur la continuité. On raisonne alors par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, l'initialisation étant claire dans chaque cas.

(i) $\mathscr{P}(k)$: « $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R}), \quad \lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R})$ et $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$ ».
Hérédité. On suppose le résultat vrai au rang k. Soit $f, g \in \mathscr{C}^{k+1}(D, \mathbb{R})$, alors $f, g \in \mathscr{C}^1(D, \mathbb{R})$, donc $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^1(D, \mathbb{R})$ et, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$. Or $f', g' \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R})$ ainsi, par hypothèse de récurrence, $(\lambda f + \mu g)' \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R})$, *i.e.* $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^{k+1}(D, \mathbb{R})$. En outre,
$$(\lambda f + \mu g)^{(k+1)} = \Big((\lambda f + \mu g)^{(k)}\Big)' = \Big(\lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}\Big)' = \lambda\Big(f^{(k)}\Big)' + \mu\Big(g^{(k)}\Big)' = \lambda f^{(k+1)} + \mu g^{(k+1)}.$$

$\mathscr{P}(k)$: « $\forall f, g \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R}), \quad fg \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R})$ et $(fg)^{(k)} = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p)}$ ».
Hérédité. On suppose le résultat vrai au rang k. Soit $f, g \in \mathscr{C}^{k+1}(D, \mathbb{R})$, alors $f, g \in \mathscr{C}^1(D, \mathbb{R})$, donc $fg \in \mathscr{C}^1(D, \mathbb{R})$ et $(fg)' = f'g + fg'$. Or $f'g, fg' \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R})$, par hypothèse de récurrence, ainsi $(fg)' \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R})$, par combinaison linéaire, *i.e.* $fg \in \mathscr{C}^{k+1}(D, \mathbb{R})$. En outre,
$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= \Big((fg)^{(n)}\Big)' \underset{\text{HR}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(f^{(k)} g^{(n-k)}\Big)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\Big(f^{(k)}\Big)' g^{(n-k)} + f^{(k)} \Big(g^{(n-k)}\Big)'\right) \\
\ldots &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\Big) \underset{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} f^{(j)} g^{(n-j+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
\ldots &= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)}_{\text{Formule de Pascal}} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(0)} g^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}.\end{aligned}$$

$\mathscr{P}(k)$: « $\forall f, g \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R}), \quad (\forall x \in D, \quad g(x) \neq 0) \implies \dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R})$ ».
Hérédité. On suppose le résultat vrai au rang k. Soit $f, g \in \mathscr{C}^{k+1}(D, \mathbb{R})$, g ne s'annulant pas sur D, alors $f, g \in \mathscr{C}^1(D, \mathbb{R})$, donc $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^1(D, \mathbb{R})$ avec $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$. Or $f'g - fg', g^2 \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R})$, par produit et combinaison linéaire, ainsi $\left(\dfrac{f}{g}\right)' \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R})$, par hypothèse de récurrence, *i.e.* $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^{k+1}(D, \mathbb{R})$.

(ii) $\mathscr{P}(k)$: « $\forall f \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R}), \quad \forall g \in \mathscr{C}^k(E, \mathbb{R}), \quad f[D] \subset E \implies g \circ f \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R})$ ».
Hérédité. On suppose le résultat vrai au rang k. Soit $f \in \mathscr{C}^{k+1}(D, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^{k+1}(E, \mathbb{R})$ telles que $f[D] \subset E$, alors $f \in \mathscr{C}^1(D, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^1(E, \mathbb{R})$, donc $g \circ f \in \mathscr{C}^1(D, \mathbb{R})$ et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$. Or $f' \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R})$, et $g' \circ f \in \mathscr{C}^k(E, \mathbb{R})$ par hypothèse de récurrence, ainsi $(g \circ f)' \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R})$, par produit, *i.e.* $g \circ f \in \mathscr{C}^{k+1}(D, \mathbb{R})$, par produit.

(iii) $\mathscr{P}(k)$: « Pour tout $f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$, si f est bijective de I sur $J = f[I]$ et si f' ne s'annule pas sur I, alors$f^{-1} \in \mathscr{C}^k(J, \mathbb{R})$ ».
Hérédité. On suppose le résultat vrai au rang k. Soit $f \in \mathscr{C}^{k+1}(I, \mathbb{R})$, bijective de I sur $J = f[I]$ et telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$, donc $f^{-1} \in \mathscr{C}^1(J, \mathbb{R})$ et $\big(f^{-1}\big)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$. Or $f^{-1} \in \mathscr{C}^k(J, \mathbb{R})$, par hypothèse de récurrence, ainsi $\big(f^{-1}\big)' \in \mathscr{C}^k(J, \mathbb{R})$, par composition et quotient, *i.e.* $f^{-1} \in \mathscr{C}^{k+1}(J, \mathbb{R})$.