18 Corps des fractions rationnelles

Dans l'ensemble de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ †.

1 Construction du corps des fractions rationnelles

Le caractère intègre de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ va nous permettre de construire son *corps des fractions*‡ vis-à-vis duquel il s'identifiera à un sous-anneau. On notera l'analogie totale avec le corps des rationnels $\mathbb{Q}$ qui n'est rien d'autre que le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Définition-théorème 1 – Corps des fractions rationnelles

Définition. On admet l'existence d'un ensemble, noté $\mathbb{K}(X)$, satisfaisant les trois assertions suivantes.

(i) À tout couple $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec Q non nul, on peut associer un unique élément de $\mathbb{K}(X)$ noté $\dfrac{P}{Q}$.

(ii) Tout élément F de $\mathbb{K}(X)$ peut être écrit sous la forme $\dfrac{P}{Q}$, où $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec Q non nul. Un tel couple (P, Q) est appelé un *représentant de* F.

(iii) Pour tous $(P, Q), (S, T) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec Q et T non nuls, $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{S}{T} \iff PT = SQ$.

Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés les *fractions rationnelles à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

Structure de corps. L'ensemble $\mathbb{K}(X)$ est muni d'une structure de corps via les deux lois de composition internes $+$ et $\times$ définies par

$$\forall (P, Q), (S, T) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \backslash \{0\}), \quad \frac{P}{Q} + \frac{S}{T} = \frac{PT + SQ}{QT} \quad \text{et} \quad \frac{P}{Q} \times \frac{S}{T} = \frac{PS}{QT},$$

ces définitions étant légitimes car indépendantes du choix des représentants (P, Q) et (S, T) des fractions rationnelles $\dfrac{P}{Q}$ et $\dfrac{S}{T}$.

Les polynômes sont des fractions rationnelles. L'application $P \longmapsto \dfrac{P}{1}$ est un morphisme injectif d'anneaux de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$. Cette injection permet d'identifier tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ à la fraction rationnelle $P/1$ et cette identification fait de $\mathbb{K}[X]$ un sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$.

Démonstration. Admis, conformément au programme. On trouvera le détail d'une construction de $\mathbb{K}(X)$ à l'annexe A. ■

Exemple 2 Dans $\mathbb{R}(X)$, les fractions rationnelles $\dfrac{1}{X}$ et $\dfrac{X+1}{X(X+1)}$ sont égales, puisque $1 \times X(X+1) = X \times (X+1)$.

✎ **En pratique** ✎ Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec Q non nul, si P est non nul, alors $\left(\dfrac{P}{Q}\right)^{-1} = \dfrac{Q}{P}$.

Exemple 3 – Conjuguée d'une fraction rationnelle La fraction rationnelle $\dfrac{\overline{P}}{\overline{Q}}$ ne dépend pas du choix du représentant (P, Q) de la fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$, on l'appelle la *fraction rationnelle conjuguée de* F et on la note $\overline{F}$. On déduit alors immédiatement des propriétés sur les polynômes que

$$\forall F, G \in \mathbb{C}(X), \quad \overline{F+G} = \overline{F} + \overline{G} \quad \text{et} \quad \overline{FG} = \overline{F}\,\overline{G}.$$

En effet, soit (P, Q) et (S, T) deux représentants de F, on a donc $PT = SQ$, ce qui entraîne $\overline{P}\,\overline{T} = \overline{S}\,\overline{Q}$.

†. L'ensemble des définitions et résultats de la première partie de ce chapitre restent valables sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque.

‡. En théorie des anneaux, le *corps des fractions* d'un anneau intègre A est le plus petit corps commutatif (à isomorphisme près) contenant A. Sa construction est une généralisation à un anneau intègre de la construction du corps des rationnels $\mathbb{Q}$ à partir de l'anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z}$. La construction donnée à l'annexe A reste effectivement valable pour un anneau A intègre quelconque.

1.1 Forme irréductible d'une fraction rationnelle

La notion de forme irréductible pour une fraction rationnelle est l'analogue de celle déjà connue pour les nombres rationnels.

Définition 4 – Représentant irréductible d'une fraction rationnelle

- On appelle *représentant irréductible* d'une fraction rationnelle F tout représentant (P, Q) de F tel que les polynômes P et Q soient premiers entre eux.
- On appelle *représentant irréductible unitaire* d'une fraction rationnelle F tout représentant irréductible (P, Q) de F tel que le polynôme Q soit unitaire.

Théorème 5 – Existence et « unicité » de la forme irréductible

(i) Si P/Q est une forme irréductible d'une fraction rationnelle S/T, alors

$$\exists R \in \mathbb{K}[X], \quad S = RP \ \text{ et } \ T = RQ.$$

(ii) Si P_1/Q_1 et P_2/Q_2 sont deux formes irréductibles d'une même fraction rationnelle, alors

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad P_2 = \lambda P_1 \ \text{ et } \ Q_2 = \lambda Q_1.$$

(iii) Toute fraction rationnelle admet un et un seul représentant irréductible unitaire.

Démonstration.

(i) Par hypothèse $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{S}{T}$, soit $PT = SQ$. Ainsi Q divise PT, or P et Q sont premiers entre eux, par conséquent Q divise T et il existe donc $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $T = QR$, d'où

$$S = \frac{PT}{Q} = \frac{PQR}{Q} = PR.$$

(ii) D'après **(i)**, Q_1 et Q_2 sont associés, or ils sont non nuls, ainsi le polynôme R précédent est une constante non nulle.

(iii) L'unicité est clair d'après le point précédent. Pour l'existence, considérons un représentant quelconque (P, Q) : on commence par diviser P et Q par leur PGCD, puis on divise le numérateur et le dénominateur obtenu par le coefficient dominant de ce dernier. ■

Exemple 6

- La forme irréductible unitaire de $\dfrac{X^2 + X - 2}{X^2 + 2X - 3}$ est $\dfrac{X + 2}{X + 3}$.

  En effet, $\left(X^2 + X - 2\right) \wedge \left(X^2 + 2X - 3\right) = ((X-1)(X+2)) \wedge ((X-1)(X+3)) = X - 1$.
- La forme irréductible unitaire d'un polynôme P est $P/1$. E particulier, $0/1$ est la forme irréductible unitaire de la fraction rationnelle nulle.

Exemple 7 Pour tout $F \in \mathbb{C}(X)$, $\quad F \in \mathbb{R}(X)$ si et seulement si $F = \overline{F}$.

1.2 Degré et partie entière d'une fraction rationnelle

Définition-théorème 8 – Degré d'une fraction rationelle

Soit $F = P/Q \in \mathbb{K}(X)$. La quantité $\deg P - \deg Q$, qui appartient à $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ et ne dépend pas du représentant (P, Q) choisi pour la fraction F, est appelée le *degré de* F et est aussi notée $\deg F$.

Démonstration. Soit (P, Q) et (S, T) deux représentants de F.

- Puisque $Q \neq 0$, $\deg Q \in \mathbb{N}$ et la quantité $\deg P - \deg Q$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.
- Par hypothèse, $PT = SQ$ dans $\mathbb{K}[X]$, ainsi

  $$\deg P + \deg T = \deg(PT) = \deg(QS) = \deg S + \deg Q$$

  et puisque $\deg Q$ et $\deg T$ sont des entiers, il vient $\deg P - \deg Q = \deg S - \deg T$. ■

Remarque 9 Un polynôme P s'identifie à la fraction rationnelle $P/1$ dont le degré est $\deg P - \deg 1 = \deg P$. Ainsi la définition du degré sur $\mathbb{K}(X)$ prolonge celle du degré défini sur $\mathbb{K}[X]$, ce qui légitime cette notation commune.

Exemple 10

- À l'instar des polynômes, le degré d'une fraction rationnelle F vaut $-\infty$ si et seulement si F est nulle.
- $\deg\left(\dfrac{14X^2-3}{7X^5+8X^3}\right) = \deg\big(14X^2-3\big) - \deg\big(7X^5+8X^3\big) = -3.$

On dispose alors de propriétés identiques à celles connues pour les polynômes.

Théorème 11 – Propriété du degré

Soit F et G deux fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

(i) $\deg(F+G) \leqslant \max\{\deg F, \deg G\}$. **(ii)** $\deg(FG) = \deg F + \deg G$.

Démonstration. ... ■

Définition-théorème 12 – Partie entière d'une fraction rationnelle

Toute fraction rationnelle F s'écrit de façon unique comme la somme d'un polynôme, appelé la *partie entière de* F, et d'une fraction rationnelle de degré strictement négatif.

Démonstration. ... ■

✎ **En pratique** ✎ La partie entière d'une fraction rationnelle $F = P/Q$ s'obtient comme le quotient de la division euclidienne du numérateur P par le dénominateur Q. En particulier, si $\deg F \geqslant 0$, alors le degré de la partie entière de F est $\deg F$.

Exemple 13

- La partie entière d'une fraction rationnelle de degré strictement négatif est nulle.
- La partie entière d'une fraction rationnelle de degré nul est le polynôme constant égal au quotient du coefficient dominant du numérateur par celui du dénominateur.
- La partie entière de $\dfrac{X^5}{\left(X^2+X+1\right)^2}$ est $X-2$ et $\dfrac{X^5}{\left(X^2+X+1\right)^2} = X-2+\dfrac{X^3+4X^2+3X+2}{\left(X^2+X+1\right)^2}$.

  En effet, la division euclidienne de X^5 par $\left(X^2+X+1\right)^2$ est $X^5 = (X-2)\left(X^2+X+1\right)^2 + X^3+4X^2+3X+2$.
- La partie entière d'une fraction rationnelle paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire).
- La partie entière de la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^5+X^3+X}{\left(X^2+1\right)^2}$ est X.

  En effet, la partie entière de F est de la forme $X+a$, or elle est impaire, à l'instar de F, ce qui impose $a=0$.

1.3 Zéros, pôles et fonctions rationnelles

Définition-théorème 14 – Zéro, pôle, multiplicité

Soit F une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{K}$ de FORME IRRÉDUCTIBLE P/Q.

- On appelle *zéro de* F (resp. *pôle de* F) toute racine du numérateur P (resp. du dénominateur Q).
- Lorsque F est NON NULLE, l'*ordre de multiplicité* d'un zéro (resp. pôle) α de F est l'ordre de multiplicité de α en tant que racine de P (resp. Q).

Démonstration. D'après le point **(ii)** du théorème 5, les formes irréductibles de F sont les $\dfrac{\lambda P}{\lambda Q}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, ainsi les notions introduites ne dépendent pas du représentant irréductible choisi pour F. ■

✖ **ATTENTION !** ✖ Les zéros et les pôles d'une fraction rationnelle ne peuvent être obtenus qu'à partir d'une de ses formes irréductibles.

Exemple 15 La fraction rationnelle $F = \dfrac{X^3-1}{X^2-1}$ n'admet 1 ni comme zéro, ni comme pôle, puisque $F = \dfrac{X^2+X+1}{X+1}$ et, sous cette forme irréductible, les zéros de F sont j et $\overline{j}$, et l'unique pôle de F est -1 (chacun de multiplicité 1).

Remarque 16 Un élément λ de $\mathbb{K}$ ne peut pas être à la fois zéro et pôle d'une fraction rationnelle F. Dans le cas contraire, avec $F = P/Q$ une forme irréductible, on aurait $P(\lambda) = Q(\lambda) = 0$, et les polynômes P et Q seraient donc divisibles par $X - \lambda$, ce qui contredirait le caractère irréductible de l'écriture P/Q.

Définition-théorème 17 – Fonction rationnelle

Soit F une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{K}$, de forme IRRÉDUCTIBLE P/Q. Notons A l'ensemble des pôles de F (*i.e.* les racines de Q dans $\mathbb{K}$). Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}\backslash A$, on définit $F(\alpha) = \dfrac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$, et la fonction définie sur $\mathbb{K}\backslash A$ par $x \longmapsto F(x)$ est appelée la *fonction rationnelle* associée à la fraction rationnelle F.

Démonstration. Idem définition-théorème 14. ■

Exemple 18 La fonction rationnelle f associée à la fraction rationnelle $\dfrac{X^2 - 4X + 3}{X^2 - 1}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$.

Remarque 19

- Si S/T est une écriture quelconque (non nécessairement irréductible) d'une fraction rationnelle F et si $T(\alpha) \neq 0$, alors α n'est pas un pôle de F et on a $F(\alpha) = \dfrac{S(\alpha)}{T(\alpha)}$.
- Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ n'est un pôle ni de F ni de G, alors α n'est pôle ni de la combinaison linéaire $\lambda F + \mu G$ ni du produit FG et

$$(\lambda F + \mu G)(\alpha) = \lambda F(\alpha) + \mu G(\alpha) \qquad \text{et} \qquad (FG)(\alpha) = F(\alpha)G(\alpha).$$

2 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$

Il est immédiat de réduire une somme de fractions rationnelles au même dénominateur

$$X + \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} = \frac{X^2(X+1)}{X(X+1)} + \frac{X+1}{X(X+1)} - \frac{X}{X(X+1)} = \frac{X^3 + X^2 + 1}{X(X+1)}.$$

Cette section présente les outils pour réaliser l'opération inverse consistant à décomposer une fraction rationnelle « compliquée » en une somme de morceaux « simples ». Commençons par illustrer ce processus sur l'exemple suivant.

Exemple introductif. On cherche à décomposer sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^8 + 8X + 3}{(X-1)^3(X-2)(X^2+1)^2}$.

- On commence par calculer la partie entière de F : le quotient de la division euclidienne de $X^8 + 8X + 3$ par $(X-1)^3(X-2)\left(X^2+1\right)^2$ est 1, ainsi

$$F = 1 + \overbrace{\frac{\cdots}{(X-1)^3(X-2)(X^2+1)^2}}^{\deg<0}.$$

- On détermine la factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ du dénominateur : ici $(X-1)^3(X-2)\left(X^2+1\right)^2$ est déjà sous forme irréductible, puisque $X^2 + 1$ est sans racine réelle.
- On peut alors montrer qu'il existe des réels a, b, c, d, e, f, g et h tels que

$$F = 1 + \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X-2} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^2} + \frac{gX+h}{X^2+1}$$

  et cette écriture correspond à la décomposition en éléments simples de F.
  × Chaque facteur $(X-\lambda)^m$ du dénominateur est associé à une somme $\dfrac{a_m}{(X-\lambda)^m} + \dfrac{a_{m-1}}{(X-\lambda)^{m-1}} + \ldots + \dfrac{a_1}{X-\lambda}$ de m termes, avec $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$.
  × Chaque facteur $(X^2 + aX + b)^m$ du dénominateur, pour lequel $X^2 + aX + b$ est sans racine réelle, est associé à une somme $\dfrac{c_m X + d_m}{(X^2 + aX + b)^m} + \ldots + \dfrac{c_1 X + d_1}{X^2 + aX + b}$ de m termes, avec $c_1, \ldots, c_m, d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{R}$.

  Il reste alors à apprendre à calculer explicitement les coefficients a, b, c, d, e, f, g et h.

Une application majeure de la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles se concrétisera dans le calcul des primitives de telles fonctions (cf. section 2.3).

2.1 Existence et unicité

Théorème 20 – Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ de partie entière E et de pôles distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$. Il existe alors une et une seule famille $(a_{i,k})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant k\leqslant m_i}}$ de nombres complexes telle que

$$F = E + \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{i,k}}{(X-\lambda_i)^k}}_{\substack{\text{Partie polaire}\\ \text{associée au pôle } \lambda_i}}.$$

Une telle écriture de F est appelée sa *décomposition en éléments simples sur* $\mathbb{C}$.

Démonstration. Admis conformément au programme. ■

Exemple 21 Dans les exemples suivants, où l'on fera apparaître la partie entière même lorsqu'elle est nulle, les fractions proposées sont à coefficients réels et donc égales à leur conjuguée. Par conséquent, par unicité de la décomposition en éléments simples, certains coefficients sont égaux à conjugaison près tandis que d'autres sont réels (cf. paragraphe 2.2).

1. Il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $\dfrac{X^3+4X^2+1}{X^2+1} = X+4+\dfrac{a}{X-i}+\dfrac{\overline{a}}{X+i}$.
2. Il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $e \in \mathbb{C}$ tels que
$$\frac{X^4+X+1}{X(X-5)^3(X^2+4)} = 0+\frac{a}{X}+\frac{b}{(X-5)^3}+\frac{c}{(X-5)^2}+\frac{d}{X-5}+\frac{e}{X-2i}+\frac{\overline{e}}{X+2i}.$$
3. Il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b, c \in \mathbb{C}$ tels que $\dfrac{1}{X(X^2+X+1)^2} = 0+\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{(X-j)^2}+\dfrac{c}{X-j}+\dfrac{\overline{b}}{(X-\overline{j})^2}+\dfrac{\overline{c}}{X-\overline{j}}$.

Théorème 22 – Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ sous FORME IRRÉDUCTIBLE de partie entière E. On considère la factorisation irréductible de Q sur $\mathbb{R}$: $Q = \alpha \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i} \times \prod_{j=1}^{s}\left(X^2+b_jX+c_j\right)^{n_j}$ (notations du théorème 59 du chapitre 17).
Il existe alors des familles uniques $(a_{i,k})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant k\leqslant m_i}}$, $(u_{j,k})_{\substack{1\leqslant j\leqslant s\\ 1\leqslant k\leqslant n_j}}$ et $(v_{j,k})_{\substack{1\leqslant j\leqslant s\\ 1\leqslant k\leqslant n_j}}$ de nombres réels telles que

$$F = E + \overbrace{\sum_{i=1}^{r} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{i,k}}{(X-\lambda_i)^k}}_{\substack{\text{Partie polaire}\\ \text{associée au pôle } \lambda_i}}}^{\substack{\text{Éléments simples}\\ \text{de première espèce}}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_j} \frac{u_{j,k}X+v_{j,k}}{(X^2+b_jX+c_j)^k}}^{\text{Éléments simples de seconde espèce}}.$$

Une telle écriture de F est appelée sa *décomposition en éléments simples sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Admis conformément au programme. ■

Exemple 23 On reprend les exemples donnés à l'exemple 21.

1. Il existe $a', b' \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{X^3+4X^2+1}{X^2+1} = X+4+\dfrac{a'X+b'}{X^2+1}$.
2. Il existe $a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{R}$
$$\frac{X^4+X+1}{X(X-5)^3(X^2+4)} = 0+\frac{a'}{X}+\frac{b'}{(X-5)^3}+\frac{c'}{(X-5)^2}+\frac{d'}{X-5}+\frac{e'X+f'}{X^2+4}.$$
3. Il existe $a', b', c', d', e' \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{1}{X(X^2+X+1)^2} = 0+\dfrac{a'}{X}+\dfrac{b'X+c'}{(X^2+X+1)^2}+\dfrac{d'X+e'}{X^2+X+1}$.

Théorème 24 – Décomposition en éléments simples de P'/P

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant et scindé de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ dans $\mathbb{K}$ de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$, alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{X - \lambda_i}.$$

Démonstration. ... ■

2.2 Méthodes pratiques d'obtention des coefficients

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle à coefficients complexes de partie entière E et de pôles distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$. Sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ est de la forme

$$F = E + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{i,k}}{(X - \lambda_i)^k}.$$

Partie entière. La partie entière E s'obtient comme le quotient de la division euclidienne de P par Q.

Si la fraction est à coefficients réels... et si λ est un pôle non réel de F de multiplicité m, alors $\overline{\lambda}$ est aussi un pôle de F d'ordre m et les coefficients des parties polaires associées à λ et $\overline{\lambda}$ sont conjugués deux à deux. Par ailleurs, les coefficients des parties polaires associées aux pôles réels sont réels.

En effet, puisque le dénominateur Q est à coefficients réels, si λ est une racine non réelle de Q, alors $\overline{\lambda}$ l'est aussi avec la même multiplicité. Écrivons F sous la forme $F = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{a_{k,\lambda}}{(X-\lambda)^k} + G$, où λ n'est pas un pôle de la fraction rationnelle G, alors

$$F = \overline{F} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\overline{a_{k,\lambda}}}{\left(X - \overline{\lambda}\right)^k} + \overline{G}$$

et $\overline{\lambda}$ n'est pas un pôle de $\overline{G}$. Ainsi, la partie polaire associée au pôle $\overline{\lambda}$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\overline{a_{k,\lambda}}}{\left(X-\overline{\lambda}\right)^k}$, par unicité de la décomposition en éléments simples. Autrement dit, $a_{k,\overline{\lambda}} = \overline{a_{k,\lambda}}$ et, en particulier lorsque λ est réel, on obtient $a_{k,\lambda} = \overline{a_{k,\lambda}}$.

Si la fraction est paire ou impaire... et si λ est un pôle de F d'ordre m, alors $-\lambda$ est aussi un pôle de F de même multiplicité m. Il découle alors de la comparaison des décompositions en éléments simples de $F(X)$ et $F(-X) = \pm F(X)$ des relations entre les coefficients des parties polaires associées aux pôles λ et $-\lambda$.

Exemple 25 La fraction $F = \dfrac{4X}{\left(X^2-1\right)^2}$ se décompose en éléments simples sous la forme

$$F = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X+1)^2} + \frac{d}{X+1}$$

(la partie entière est nulle) et

$$F(X) = -F(-X) = \frac{-a}{(-X-1)^2} + \frac{-b}{-X-1} + \frac{-c}{(-X+1)^2} + \frac{-d}{-X+1} = \frac{-a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{-c}{(X-1)^2} + \frac{d}{X-1}.$$

L'unicité de la décomposition en éléments simples donne alors $c = -a$ et $d = b$.

Si la fraction est de degré strictement négatif... alors la fonction rationnelle $x \longmapsto xF(x)$ définie sur une partie de $\mathbb{R}$ a une limite finie en $+\infty$. Il en découle une relations entre les coefficients des termes en $\dfrac{1}{X-\lambda_i}$ de la décomposition en éléments simples de F.

Exemple 25 – (suite) Puisque $\deg F = -3 < 0$, la limite de $x \longmapsto xF(x)$ en $+\infty$ donne

$$0 = \lim_{x \to +\infty} xF(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{ax}{(x-1)^2} + \frac{bx}{x-1} + \frac{cx}{(x+1)^2} + \frac{dx}{x+1} \right) = b + d,$$

ce qui combiné à $d = b$ donne $b = d = 0$.

Multiplication par $(\mathbf{X}-\boldsymbol{\lambda})^{\mathbf{m}}$ puis évaluation en $\boldsymbol{\lambda}$ (élément simple de première espèce). Si λ est un pôle de F de multiplicité m, le coefficient a_m du terme $\dfrac{a_m}{(X-\lambda)^m}$ de la partie polaire de F associée au pôle λ s'obtient en évaluant en λ l'expression $(X-\lambda)^m F$, où la multiplication de F par $(X-\lambda)^m$ permet d'« effacer » le pôle λ.

Exemple 25 – (suite et fin) L'évaluation de $(X-1)^2F$ en 1 donne

$$a = \big[(X-1)^2F\big](1) = \left[\frac{4X}{(X+1)^2}\right](1) = \frac{4}{(1+1)^2} = 1.$$

En somme, on a donc $F = \dfrac{1}{(X-1)^2} - \dfrac{1}{(X+1)^2}$.

S'il ne reste qu'un ou deux coefficients à calculer… on peut évaluer F en une ou deux valeurs simples, qui ne sont pas des pôles de F.

Bilan Pour déterminer les coefficients de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle F, on pourra :

- obtenir des relations sur les coefficients si F est à coefficients réels (pour une décomposition sur $\mathbb{C}$) ou paire/impaire ;
- si $\deg F < 0$, multiplier par X puis passer à la limite en $+\infty$;
- multiplier par $(X-\lambda)^m$ puis évaluer en λ ;
- évaluer en certains points.

Évidemment, une stratégie imparable, mais potentiellement fastidieuse, consiste à mettre les deux écritures de F au même dénominateur et à identifier les coefficients des polynômes aux numérateurs.

Exemple 26 $\dfrac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \dfrac{2}{(X+1)^2} - \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{X+2}$.

Calcul des coefficients pour les éléments simples de seconde espèce. Si l'on cherche à déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $F \in \mathbb{R}(X)$, celle-ci est de la forme

$$F = E + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{i,k}}{(X-\lambda_i)^k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_j} \frac{u_{j,k}X + v_{j,k}}{(X^2+b_jX+c_j)^k}.$$

Les techniques précédentes restent valables pour la détermination de E et des coefficients $a_{i,k}$ des élément simple de première espèce. Voyons comment procéder pour un terme de seconde espèce $\dfrac{uX+v}{(X^2+bX+c)^n}$. Par définition, le trinôme réel X^2+bX+c admet deux racines complexes conjuguées ω et $\overline{\omega}$ et, comme pour les éléments simples de première espèce, on obtient une relation par évaluation :

$$u\,\omega + v = \big[(X^2+bX+c)^n F\big](\omega)$$

qui permet de déduire les valeurs de u et v. Notons qu'en pratique il est inutile de calculer explicitement ω. Il suffit d'exploiter la relation $\omega^2 = -b\omega - c$.

Exemple 27 $\dfrac{1}{(X-1)^2(X^2+4)} = \dfrac{1}{5(X-1)^2} - \dfrac{2}{25(X-1)} + \dfrac{2X-3}{25(X^2+4)}$.

Le théorème qui suit est spécifique aux PÔLES SIMPLES et commode quand le dénominateur est donné sous forme développée.

Théorème 28 – Partie polaire associée à un pôle simple

Soit $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ sous forme IRRÉDUCTIBLE et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si λ est un PÔLE SIMPLE de F, alors le coefficient a de la partie polaire associée $\dfrac{a}{X-\lambda}$ est $a = \dfrac{P(\lambda)}{Q'(\lambda)}$.

Démonstration. … ∎

Exemple 29 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{X^n - 1} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \dfrac{\omega}{X - \omega}$.

Remarque 30 – Généralisation du théorème 28 (HP) Soit $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ sous forme irréductible et $\lambda \in \mathbb{C}$. Si λ est un pôle d'ordre n de F, alors le coefficient a du terme $\dfrac{a}{(X-\lambda)^n}$ de la partie polaire associée est $a = \dfrac{n!P(\lambda)}{Q^{(n)}(\lambda)}$. Une fois déterminer ce terme, on peut le retrancher à F pour obtenir une fraction rationnelle dont λ sera un pôle d'ordre strictement inférieur à n et itérer cette démarche.

Pour terminer, observons que, lorsque les pôles NON RÉELS d'une fraction rationnelle à coefficients RÉELS sont SIMPLES, on peut aisément obtenir la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ à partir de celle sur $\mathbb{C}$ en regroupant les parties polaires conjuguées.

Exemple 31 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X^{2n}-1}$ sur $\mathbb{R}$ est

$$\frac{1}{X^{2n}-1} = \frac{1}{2n(X-1)} - \frac{1}{2n(X+1)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X - 1}{X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X + 1}.$$

2.3 Application au calcul de primitive/intégrale

Comme cela a été annoncé au début de cette section, plus aucun calcul de primitive de fractions rationnelles réelles ne peut dorénavant nous résister – sous réserve d'être capable d'obtenir explicitement sa décomposition en éléments simples et modulo des efforts potentiellement conséquents ! Commençons par illustrer cette affirmation sur un exemple.

Exemple 32 $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{t^5}{t^4-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\ln\frac{3}{5}$.

✎ **En pratique** ✎ **Primitivation d'une fraction rationnelle F réelle**

Une fraction rationnelle réelle F peut-être primitivée en suivant la démarche suivante :

1. Déterminer la décomposition en élément simple de F dans $\mathbb{R}(X)$.
2. La partie entière se primitive facilement.
3. Les termes en $\dfrac{1}{(x-\lambda)^\alpha}$ se primitivent en $\dfrac{1}{(1-\alpha)(x-\lambda)^{\alpha-1}}$, si $\alpha \neq 1$, ou en $\ln|x-\lambda|$ sinon.
4. Les termes en $\dfrac{dx+e}{(ax^2+bx+c)^\alpha}$ (avec ax^2+bx+c irréductible) se décompose en une combinaison linéaire d'un terme du type $\dfrac{u'}{u^\alpha}$ (primitvable de façon similaire au point précédent) et d'un terme de la forme $\dfrac{1}{(ax^2+bx+c)^\alpha}$. Pour traiter ce dernier terme, on commence par mettre le dénominateur sous forme canonique et factoriser par le terme constant pour se ramener à $\dfrac{1}{((\alpha x+\beta)^2+1)^\alpha}$ puis on procède au changement de variable affine $y = \alpha x + \beta$ pour se ramener à $\dfrac{1}{(y^2+1)^\alpha}$. Deux options sont alors envisageables :
   - Procéder par réduction de l'exposant α par des intégrations par parties successives :
   $$\int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^\alpha} = \int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^{\alpha-1}} - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^\alpha}\,\mathrm{d}y$$
   et on passe de l'exposant α à $\alpha - 1$ dans la seconde intégrale par une IPP en primitivant $\dfrac{y}{(y^2+1)^\alpha}$ et dérivant y.
   - Procéder au changement de variable $x = \mathrm{Arctan}(y)$, réexprimer l'intégrande comme puissance d'un cosinus, puis linéariser.

Compétences à acquérir

- Décomposer en éléments simples une fraction rationnelle explicite : exercices 6.
- Décomposer en éléments simples une fraction rationnelle générique : exercices 5, 7 et 8.
- Application à des calculs de somme : exercices 14, 9 et 11.
- Application à des calculs de primitive/intégrale : 18 à 20.

Quelques résultats classiques :

- Dérivation des fractions rationnelles (exercice 3).
- Théorème de Gauss-Lucas (exercice 9).
- Caractérisation des polynômes à coefficients complexes laissant stable $\mathbb{U}$ (exercice 13).

A Annexe

Construction du corps des fractions rationnelles (théorème 1).

Existence de l'ensemble $\mathbb{K}(X)$. Notons $\mathcal{K}$ l'ensemble $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \backslash \{0\})$ et définissons sur celui-ci la relation binaire $\sim$ de la façon suivante

$$(P, Q) \sim (S, T) \quad \Longleftrightarrow \quad PT = SQ,$$

pour tout $(P, Q), (S, T) \in \mathcal{K}$. Montrons alors que $\sim$ est une relation d'équivalence :

- **Réflexivité.** Pour tout $(P, Q) \in \mathcal{K}$, $PQ = PQ$, soit $(P, Q) \sim (P, Q)$;
- **Transitivité.** Pour tous $(P, Q), (S, T), (U, V) \in \mathcal{K}$, si $(P, Q) \sim (S, T)$ et $(S, T) \sim (U, V)$, alors $PT = SQ$ et $SV = UT$, d'où $PTV = SQV = UTQ$. Or $T \neq 0$ et $\mathbb{K}[X]$ est intègre, ainsi $PV = UQ$, soit $(P, Q) \sim (U, V)$.
- **Symétrie.** Pour tout $(P, Q), (S, T) \in \mathcal{K}$, si $(P, Q) \sim (S, T)$, alors $PT = SQ$, soit $SQ = PT$ et donc $(S, T) \sim (P, Q)$.

On définit alors $\mathbb{K}(X)$ comme l'ensemble quotient $\mathcal{K}/\sim$ de $\mathcal{K}$ par $\sim$ et, pour tout $(P, Q) \in \mathcal{K}$, on note $\dfrac{P}{Q}$ la classe d'équivalence de l'élément (P, Q). L'ensemble ainsi construit vérifie les points **(i)** à **(iii)** de la définition 1. La notation fractionnaire n'est donc qu'une notation pour représenter une classe d'équivalence de l'ensemble quotient.

Structure de corps. Soit $P, Q, S, T, U, V \in \mathbb{K}[X]$ avec Q, T, V non nuls.

- **Légitimité de la définition de $+$ et $\times$.** Les couples (P, Q) et (S, T) sont des représentants particuliers des fractions rationnelles $\frac{P}{Q}$ et $\frac{S}{T}$, qui rappelons le sont des classes d'équivalence de l'ensemble quotient $\mathbb{K}(X)$. Il s'agit donc de s'assurer que les définitions de l'addition et de la multiplication de deux fractions rationnelles sont indépendantes de ces choix de représentants. Donnons-nous pour cela $\widetilde{P}, \widetilde{Q}, \widetilde{S}, \widetilde{T} \in \mathbb{K}[X]$ avec $\widetilde{Q}$ et $\widetilde{T}$ non nuls et tels que $\frac{P}{Q} = \frac{\widetilde{P}}{\widetilde{Q}}$ et $\frac{S}{T} = \frac{\widetilde{S}}{\widetilde{T}}$ et vérifions que
$$\frac{PT + SQ}{QT} = \frac{\widetilde{P}\widetilde{T} + \widetilde{S}\widetilde{Q}}{\widetilde{Q}\widetilde{T}} \qquad \text{et} \qquad \frac{PS}{QT} = \frac{\widetilde{P}\widetilde{S}}{\widetilde{Q}\widetilde{T}}$$
soit
$$(PT + SQ)\widetilde{Q}\widetilde{T} = \left(\widetilde{P}\widetilde{T} + \widetilde{S}\widetilde{Q}\right)QT \qquad \text{et} \qquad PS\widetilde{Q}\widetilde{T} = \widetilde{P}\widetilde{S}QT,$$
ce qui est vrai car $P\widetilde{Q} = \widetilde{P}Q$ et $S\widetilde{T} = \widetilde{S}T$.
- **Commutativité de $+$.** Elle découle de la commutativité de $+$ et $\times$ dans $\mathbb{K}[X]$:
$$\frac{P}{Q} + \frac{S}{T} = \frac{PT + SQ}{QT} = \frac{SQ + PT}{TQ} = \frac{S}{T} + \frac{P}{Q}.$$
- **Associativité de $+$.** $\left(\frac{P}{Q} + \frac{S}{T}\right) + \frac{U}{V} = \frac{PT + SQ}{QT} + \frac{U}{V} = \frac{(PT + SQ)V + U(QT)}{(QT)V} = \frac{PTV + SQV + UQT}{QTV}$
et $\frac{P}{Q} + \left(\frac{S}{T} + \frac{U}{V}\right) = \frac{P}{Q} + \frac{SV + UT}{TV} = \frac{P(TV) + (SV + UT)Q}{Q(TV)} = \frac{PTV + SQV + UQT}{QTV}$.
- **Neutralité de $\frac{0}{1}$ pour $+$.** $\frac{P}{Q} + \frac{0}{1} = \frac{P \times 1 + 0 \times Q}{Q \times 1} = \frac{P}{Q}$, d'où le résultat par commutativité $+$.
- **Inverse pour $+$.** $\frac{P}{Q} + \frac{-P}{Q} = \frac{PQ + (-P)Q}{Q^2} = \frac{0}{Q^2} = 0$, d'où le résultat par commutativité.

À ce stade, $(\mathbb{K}(X), +)$ est un groupe.

- **Commutativité de $\times$.** Elle découle de la commutativité de $\times$ dans $\mathbb{K}[X]$: $\frac{P}{Q} \times \frac{S}{T} = \frac{PS}{QT} = \frac{SP}{TQ} = \frac{S}{T} \times \frac{P}{Q}$.
- **Associativité de $\times$.** Elle découle de l'associativité de $\times$ dans $\mathbb{K}[X]$:
$$\left(\frac{P}{Q} \times \frac{S}{T}\right) \times \frac{U}{V} = \frac{PS}{QT} \times \frac{U}{V} = \frac{(PS)U}{(QT)V} = \frac{P(SU)}{Q(TV)} = \frac{P}{Q} \times \left(\frac{S}{T} \times \frac{U}{V}\right).$$
- **Neutralité de $\frac{1}{1}$ pour $\times$.** $\frac{P}{Q} \times \frac{1}{1} = \frac{P \times 1}{Q \times 1} = \frac{P}{Q}$, d'où le résultat par commutativité de $\times$.
- **Distributivité de $\times$ sur $+$.** $\left(\frac{P}{Q} + \frac{S}{T}\right) \times \frac{U}{V} = \frac{PT + SQ}{QT} \times \frac{U}{V} = \frac{(PT + SQ)U}{QTV} = \frac{PTU + SQU}{QTV}$ et
$$\frac{P}{Q} \times \frac{U}{V} + \frac{S}{T} \times \frac{U}{V} = \frac{PU}{QV} + \frac{SU}{TV} = \frac{PUTV + SUQV}{QTV^2} = \frac{PUT + SUQ}{QTV},$$
d'où le résultat par commutativité de $\times$.

À ce stade, $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un anneau commutatif.

- **Inverse pour $\times$.** Si $P \neq 0$, alors $\frac{P}{Q} \times \frac{Q}{P} = \frac{PQ}{QP} = \frac{1}{1}$, ainsi, par commutativité de $\times$, $\frac{P}{Q}$ est inversible, d'inverse $\frac{Q}{P}$.

En somme, $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps.

Plongement de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$. Notons φ l'application $P \longmapsto \frac{P}{1}$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$. On a bien sûr $\varphi(1) = 1$ et, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$,
$$\varphi(P + Q) = \frac{P + Q}{1} = \frac{P}{1} + \frac{Q}{1} = \varphi(P) + \varphi(Q) \qquad \text{et} \qquad \varphi(PQ) = \frac{PQ}{1} = \frac{P}{1} \times \frac{Q}{1} = \varphi(P)\varphi(Q)$$
ainsi φ est un morphisme d'anneaux. Par ailleurs, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a les équivalences
$$\varphi(P) = 0 \iff \frac{P}{1} = 0 = \frac{0}{1} \iff P = 0,$$
ainsi $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ et φ est injectif. Par conséquent, l'image $\varphi(\mathbb{K}[X])$ de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ par le morphisme φ est un sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$ isomorphe à $\mathbb{K}[X]$, ce qui légitime l'identification de $\mathbb{K}[X]$ comme sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$.