15 Étude des suites numériques

1 Généralités sur les suites réelles

Définition 1 – Suite réelle

On appelle *suite réelle* toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Traditionnellement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on préfère noter u_n (lire « u indice n ») le réel $u(n)$, appelé *terme de rang* n de la suite u, et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite u.

Remarque 2 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne donc l'ensemble des suites réelles.

✖ Attention ! ✖ Le réel u_n ne doit pas être confondu avec la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ elle-même, qui est un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *i.e.* une application. Il est par conséquent exclu de confondre les notations u_n et $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Dans ce chapitre, on manipulera essentiellement des suites définies sur $\mathbb{N}$. Toutefois on peut évidemment considérer des suites définies sur des parties de $\mathbb{N}$ de la forme $[\![n_0, +\infty [\![$, avec $n_0 \in \mathbb{N}$, les résultats ci-après s'énonçant alors *mutatis mutandis*.

1.1 Propriétés liées à la relation d'ordre

Définition 3 – Suite croissante/décroissante/monotone

Une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite

- *strictement croissante* lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n$;
- *strictement décroissante* lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n$;
- *croissante* lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant u_n$;
- *décroissante* lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$;
- *constante* lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n$.

Une suite rélle est dite *monotone* (resp. *strictement monotone*) lorsqu'elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

✎ En pratique ✎ Pour établir qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone, les deux méthodes suivantes sont courantes.

- Étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ de deux termes consécutifs.
- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement positive, comparer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. Cette stratégie s'avère pertinente lorsque u_n est défini par des produits ou des quotients et que l'on peut espérer des simplifications.

Exemple 4 La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$ est croissante.

Exemple 5

- Une suite arithmétique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de raison r est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si $r > 0$ (resp. $r < 0$). En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$.
- La suite géométrique $(q^n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si $q > 1$ (resp. $0 < q < 1$). Elle n'est pas monotone si $q < 0$.

Remarque 6 Au chapitre 10, on a défini la croissance d'une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ par l'assertion

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad p \leqslant q \implies u_p \leqslant u_q.$$

Cette définition de la croissance d'une suite est évidemment équivalente à celle qui vient d'être donnée à la définition 3. Et il en va bien sûr de même pour les autres points de cette définition.

Définition 7 – Suite majorée/minorée/bornée

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite *majorée* lorsque :
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M.$$
Le cas échéant, M est un *majorant* de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

- La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite *minorée* lorsque :
$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m.$$
Le cas échéant, m est un *minorant* de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

- La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite *bornée* lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée, ce qui équivaut à l'assertion
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M.$$

Remarque 8

- Une suite majorée ne possède jamais un seul majorant. En effet, une suite majorée par 2 l'est aussi par 3, π, $\sqrt{17}$, ... On parelra donc toujours d'UN majorant et non DU majorant.
- Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée si et seulement si l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs de la suite est une partie majorée de $\mathbb{R}$.
- Toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ croissante (resp. décroissante) est minorée (resp. majorée), par u_0 notamment.

Des remarques similaires valent pour les minorations.

✖ **ATTENTION !** ✖ Les majorants d'une suite sont par définition des constantes, *i.e.* des réels qui ne dépendent pas de la variable n. Ainsi, une majoration de u_n par un réel QUI DÉPEND DE n NE montre PAS que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée.

1.2 Propriétés vraies à partir d'un certain rang

Définition 9 – Propriété vraie à partir d'un certain rang

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite et $\mathscr{P}$ une propriété. On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *vérifie la propriété $\mathscr{P}$ à partir d'un certain rang* lorsqu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $\mathscr{P}(u_n)$ est vraie.

En général, on ne s'intéresse pas aux premiers termes d'une suite, mais à son comportement asymptotique, *i.e.* « à l'infini » lorsque l'indice n devient grand. Par exemple, si tous les termes d'une suite sont majorés par 1 sauf les 30 premiers, on a quand même envie de dire que la suite est « presque » majorée par 1. Pour être précis, on dit qu'elle est majorée par 1 *à partir d'un certain rang* (sans expliciter nécessairement ce rang).

Exemple 10 La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \text{ pour } n \geqslant 0 \end{cases}$ est positive à partir d'un certain rang.

En effet, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, puisque $u_{n+1} - u_n = 2 \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $u_1 = -3$, $u_2 = -1$ et $u_3 = 1$. Ainsi, $u_n \geqslant 0$, pour tout $n \geqslant 3$.

Définition 11 – Suite stationnaire

Une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite *stationnaire* lorsqu'elle est constante à partir d'un certain rang, *i.e.*
$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_{n+1} = u_n.$$

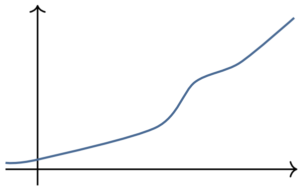
Exemple 12 Pour tout réel x, la suite $\left(\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor\right)_{n\geqslant 1}$ est stationnaire.

En effet, pour tout $n \geqslant |\lfloor x \rfloor| + 1$, $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

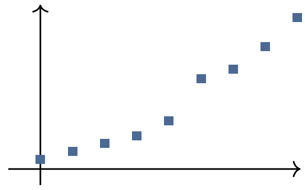
1.3 Définition d'une suite

Une suite peut être définie de diverses façons : explicitement, implicitement, par récurrence. Ceci ne signifie pas qu'il y a plusieurs sortes de suites, mais plusieurs manières de les définir. En effet, une suite géométrique, par exemple, peut être définie aussi bien explicitement – « $u_n = u_0 q^n$ » – que par récurrence – « $u_{n+1} = q u_n$ ».

Suites définies explicitement. Définir une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ explicitement revient à exprimer son terme général via une formule. Typiquement, à l'aide d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$: $u_n = f(n)$. De nombreuses propriétés de f se transmettent alors telles quelles à $(u_n)_{n\geqslant 0}$, qui n'est finalement que la restriction de f à $\mathbb{N}$. Par exemple : la monotonie, le signe, le caractère majoré/minoré/borné, la limite de f en $+\infty$.



f est croissante et minorée par 0...



... ainsi $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et minorée par 0.

Suites définies implicitement. Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ peut-être définie implicitement par la donnée d'une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique élément u_n dans I tel que $f_n(u_n) = 0$. Dans ce contexte, même s'il est en général impossible d'expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, on peut toutefois étudier ces propriétés (monotonie, limite, ...).

Exemple 13 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique solution dans $[0\,,1]$ de l'équation $x^n = \cos x$ (cf. exercice 49).

Suites définies par une relation de récurrence « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». On peut définir une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par récurrence par la donnée de son premier terme u_0 et d'une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ », où f est une fonction. Une telle définition présente a priori l'inconvénient majeur suivant : pour calculer u_{1000}, il semble nécessaire de calculer les uns après les autres $u_1, \ldots, u_{999}, u_{1000}$.

✖ **Attention !** ✖ Pour une suite récurrente $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ », les implications suivantes sont fausses :

f est croissante $\not\Longrightarrow$ $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante. $\qquad$ f est décroissante $\not\Longrightarrow$ $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Nous reviendrons sur certaines propriétés de ces suites à la section 8.2.

2 Limite d'une suite réelle dans $\overline{\mathbb{R}}$

La définition qui suit repose sur la notion de voisinage qui a été introduite à la définition 24 du chapitre 9.

Définition 14 – Limite d'une suite

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- **Définition générale.** On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *admet ℓ pour limite* lorsque tout voisinage de ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. Soit, en notant $\mathscr{V}_\ell$ l'ensemble des voisinages de ℓ,

$$\forall \mathscr{V} \in \mathscr{V}_\ell, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \in \mathscr{V}.$$

Cette définition générale se décline en des énoncés spécifiques suivant la nature de ℓ.

- **Cas d'une limite finie.** Si $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *admet ℓ pour limite* lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

- **Cas de la limite $+\infty$.** On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *admet $+\infty$ pour limite* lorsque

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n > A.$$

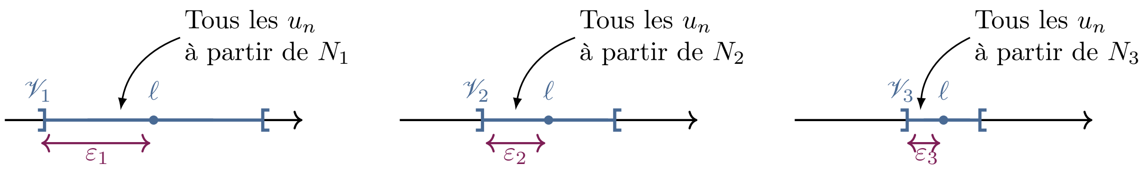
- **Cas de la limite $-\infty$.** On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *admet $-\infty$ pour limite* lorsque

$$\forall A < 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n < A.$$

Remarque 15 Une fois n'est pas coutume, on peut montrer, sans difficulté, que les inégalités strictes $|u_n - \ell| < \varepsilon$, $u_n > A$ et $u_n < A$ peuvent être remplacées par des inégalités larges sans modifier la notion de limite.

Ces définitions un peu obscures au premier abord satisfont en réalité parfaitement l'intuition que nous avons des limites, comme l'indique les trois remarques suivantes :

- Trois voisinages $\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2, \mathscr{V}_3$ ne suffisent pas à contraindre $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à tendre vers ℓ. Il est essentiel que la définition de la limite commence par « POUR TOUT voisinage $\mathscr{V}$ de ℓ ».



  Ces figures illustrent le cas d'une limite ℓ finie, le principe étant similaire pour une limite infinie.
- Intuitivement, les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne comptent pas lorsque l'on s'intéresse à sa limite. Pour cette raison, la définition de la limite piège u_n dans des voisinages de ℓ uniquement À PARTIR D'UN CERTAIN RANG.
- Intuitivement, plus le voisinage $\mathscr{V}$ est resserré autour de ℓ, plus le rang N est grand.

Exemple 16

- La suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ admet 0 pour limite.

  En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$ les équivalences

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon \quad\iff\quad \frac{1}{n^2} < \varepsilon \quad\iff\quad n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \quad\iff\quad n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

  Ainsi l'intervalle ouvert $]-\varepsilon\,, \varepsilon[$ (qui est un voisinage de 0) contient tous les termes $\frac{1}{n^2}$ à partir du rang $\left\lfloor\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right\rfloor + 1$.
- La suite $\left((-1)^n\right)_{n\geqslant 0}$ n'admet aucun réel pour limite.

  En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$, ainsi les deux intervalles ouverts disjoints $\left]-\frac{3}{2}\,, -\frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}\,, \frac{3}{2}\right[$, centrés respectivement en -1 et 1, contiennent chacun une infinité de termes de $\left((-1)^n\right)_{n\geqslant 0}$ (cf. exemple 65).

Remarque 17 Il résulte clairement de la définition de la limite d'une suite que

- la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet le réel ℓ pour limite si et seulement si la suite $(u_n - \ell)_{n\geqslant 0}$ admet 0 pour limite ;
- la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet 0 pour limite si et seulement s'il en va de même de la suite $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$.

Théorème 18 – Unicité de la limite

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ possède une limite, alors elle est unique et sera notée $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

En pratique, pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, la relation $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ est aussi souvent notée $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration. Soit $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. On veut montrer, sous l'hypothèse où $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet ℓ et ℓ' pour limites, que $\ell = \ell'$. Supposons pour cela par l'absurde que $\ell \neq \ell'$. Il existe alors un voisinage $\mathscr{V}$ de ℓ et un voisinage $\mathscr{V}'$ de ℓ' tels que $\mathscr{V} \cap \mathscr{V}' = \varnothing$ (point **(ii)** du théorème 25 du chapitre 9). Or, par hypothèse, $u_n \in \mathscr{V}$ à partir d'un certain rang N et $u_n \in \mathscr{V}'$ à partir d'un certain rang N'. Alors, en posant $n_0 = \max\{N, N'\}$, $u_{n_0} \in \mathscr{V} \cap \mathscr{V}' = \varnothing$ – contradiction ! ■

Remarque 19 Une idée centrale de la preuve précédente va revenir régulièrement dans ce chapitre : si une propriété $\mathscr{P}_1$ est vraie à partir d'un rang N_1, une propriété $\mathscr{P}_2$ est vraie à partir d'un rang N_2, ... et enfin une propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie à partir d'un rang N_k, alors à partir du rang $\max\{N_1, \dots, N_k\}$, les propriétés $\mathscr{P}_1, \dots, \mathscr{P}_k$ sont TOUTES vraies simultanément.

Définition 20 – Convergence/divergence

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite. On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est *convergente* ou qu'elle *converge* lorsqu'elle possède une limite FINIE. On dit sinon qu'elle est *divergente* ou qu'elle *diverge*.

✖ **ATTENTION !** ✖ « Converger » n'est pas « avoir une limite » mais « avoir une limite FINIE » et « Diverger » n'est pas seulement « avoir $\pm\infty$ pour limite » mais éventuellement « ne pas avoir de limite ».

Limite finie	Limite $\pm\infty$	Pas de limite
Convergence	Divergence	

Exemple 21 D'après l'exemple 16, la suite $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$. En revanche, la suite $\left((-1)^n\right)_{n\geqslant 0}$ diverge.

Théorème 22 – Convergence et caractère borné

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. ... ■

✖ **ATTENTION !** ✖

- La réciproque est fausse. En effet, la suite de terme général $(-1)^n$ est bornée (entre -1 et 1) sans être convergente.
- Une suite non bornée n'admet pas nécessairement $\pm\infty$ pour limite. En effet, la suite de terme général $(-1)^n n$ n'est pas bornée et n'a pas de limite (distinguer les termes de rangs pairs et impairs).

3 Manipulations des limites

3.1 Opérations sur les limites

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles et $\ell,\ell'\in\mathbb{R}$. On suppose dans tout ce paragraphe que les limites $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}v_n$ EXISTENT. Dans les tableaux ci-après (qui énoncent des théorèmes !), le symbole **? ? ?** indique une *indétermination*, *i.e.* un cas pour lequel il n'est pas possible de conclure a priori, et le symbole ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$.

Somme

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	**? ? ?**

Produit

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$	ℓ	$\ell\neq 0$ ou ∞	0
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}v_n$	ℓ'	∞	∞
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_nv_n)$	$\ell\ell'$	∞ + règle des signes	**? ? ?**

Inverse

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$	$\ell\neq 0$	∞	0^+ ou 0^-	0
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	∞ + règle des signes	**? ? ?**

La notation $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0^+$ (resp. 0^-) signifie que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ et $u_n>0$ (resp. <0) à partir d'un certain rang.

Démonstration. Certains cas sont traités à l'annexe A. ■

Des tableaux pour le produit et l'inverse, découle celui pour le quotient.

Quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	∞	ℓ	∞	$\ell \neq 0$ ou ∞	ℓ ou ∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\ell' \neq 0$	∞	∞	0^+ ou 0^-	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞ + règle des signes	0	? ? ?	∞ + règle des signes	? ? ?

En résumé, lorsqu'il n'y a pas d'indétermination, on peut retenir que :

> « La limite de la somme (resp. du produit, resp du quotient) est la somme (resp. le produit, resp. le quotient) des limites. »

Les tableaux ci-dessus ont mis en avant les *formes indéterminées* $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\dfrac{1}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ et $\dfrac{0}{0}$. Autrement dit, dans ces situations, on peut a priori obtenir N'IMPORTE QUEL RÉSULTAT (et notamment l'absence de limite).

- **Cas de la forme indéterminée $\infty - \infty$.**
  - × On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\ell) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}((n+\ell)-n) = \ell$.
  - × On peut obtenir ∞ : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n-n) = +\infty$.
  - × On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+(-1)^n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $(n+(-1)^n) - n = (-1)^n$ n'a pas de limite.
- **Cas de la forme indéterminée $0 \times \infty$.**
  - × On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ell}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ell}{n}\times n\right) = \ell$.
  - × On peut obtenir ∞ : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\times n^2\right) = +\infty$.
  - × On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\dfrac{(-1)^n}{n} \times n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

✖ **Attention !** ✖ Nous avons établi à l'exemple 16 du chapitre 5 que $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cet exemple prouve que l'on peut avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ sans avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 1$. Autrement dit, $1^{+\infty}$ est une nouvelle forme indéterminée. Notons au passage que 0^0 est aussi une forme indéterminée pour les limites par opérations.

Le résultat suivant est momentanément admis dans la mesure où il requiert la notion de limite d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ – certes connue intuitivement, mais qui ne sera définie précisément qu'au chapitre suivant.

Théorème 23 – Composition à gauche par une fonction

Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, ℓ un élément de I ou une borne de I, $L \in \overline{\mathbb{R}}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle à valeurs dans I.

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{et} \quad \text{si } \lim_{x\to\ell} f(x) = L, \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L.$$

Exemple 24 La suite $\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

En effet, on a d'une part $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et d'autre part $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x) = 1$, d'où le résultat par composition.

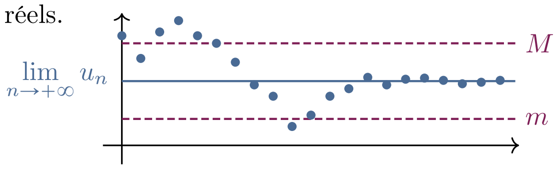
3.2 Limites et inégalités

Théorème 25 – Limites et inégalités strictes

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle possédant une limite et m, M deux réels.

(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < M$, alors $u_n < M$ à partir d'un certain rang.

(ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > m$, alors $u_n > m$ à partir d'un certain rang.



$m < u_n < M$ à partir d'un certain rang.

En particulier, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ a le signe de ℓ à partir d'un certain rang.

Démonstration. Contentons-nous de prouver **(i)**. Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

- Si $\ell = -\infty$, tous les u_n sont dans le voisinage $]-\infty\,, M[$ de $-\infty$ à partir d'un certain rang.
- Si $\ell \in \mathbb{R}$, sachant que $M - \ell > 0$ par hypothèse, tous les u_n sont dans le voisinage $]\ell - (M-\ell)\,, \ell + (M-\ell)[\subset]-\infty\,, M[$ de ℓ, à partir d'un certain rang.

Dans les deux cas, $u_n < M$ à partir d'un certain rang. ∎

Théorème 26 – Passage à la limite dans les inégalités larges

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles CONVERGENTES.

$$\text{Si } u_n \leqslant v_n \text{ à partir d'un certain rang, alors } \lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Ce résultat est utilisé le plus souvent lorsque l'une des deux suites est constante.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, en supposant que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) < 0$. Le théorème précédent affirme alors que $v_n - u_n < 0$ à partir d'un certain rang – contradiction ! ∎

✖ **ATTENTION !** ✖ Le résultat précédent est faux avec des inégalités STRICTES ! Par exemple, $\frac{1}{n} > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Autrement dit, les inégalités strictes deviennent LARGES après passage à la limite.

Exemple 27 Si une suite convergente prend à partir d'un certain rang ses valeurs dans le segment $[a\,, b]$, alors sa limite appartient à $[a\,, b]$.

En effet, il suffit d'appliquer le théorème 26 à la suite qui converge et aux suites constantes égale à a ou à b.

Exemple 28 Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et converge vers un réel ℓ, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$.

En effet, soit $m \in \mathbb{N}$, alors, par croissance de la suite, pour tous $n \geqslant m$, $u_m \leqslant u_n$, et il suffit alors de faire tendre n vers $+\infty$.

4 Théorèmes d'existence de limite

L'existence d'une limite n'est jamais acquise. Or pour étudier l'éventuelle limite d'une suite, il est souvent crucial d'établir A PRIORI l'existence de celle-ci, le cas échéant. Les théorèmes fondamentaux qui suivent nous fournissent de façon essentielle non pas tant la VALEUR d'une limite que son EXISTENCE.

4.1 Théorème d'encadrement/minoration/majoration

Théorème 29

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(m_n)_{n\geqslant 0}$ et $(M_n)_{n\geqslant 0}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) Théorème d'encadrement (limite finie).
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = \lim\limits_{n\to+\infty} M_n = \ell$ et si $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ EXISTE et vaut ℓ.

(ii) Théorème de minoration (limite $+\infty$).
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = +\infty$ et si $u_n \geqslant m_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ EXISTE et vaut $+\infty$.

(iii) Théorème de majoration (limite $-\infty$).
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = -\infty$ et si $u_n \leqslant M_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ EXISTE et vaut $-\infty$.

Démonstration. ... ■

✖ ATTENTION ! ✖ Le théorème d'encadrement et celui de passage à la limite dans les inégalités larges ne doivent pas être confondus. Quand on passe à la limite dans une inégalité large, on sait déjà que chaque membre a une limite. Pour pouvoir passer à la limite, il faut donc au préalable avoir justifié l'existence desdites limites. Dans le théorème d'encadrement, au contraire, seules les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$ sont réputées exister initialement et l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ en découle ! Le théorème de passage à la limite n'est pas un outil pour démontrer l'existence de limite, il s'agit d'un outil pour obtenir des relations entre des limites qui existent a priori.

Exemple 30 La suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

Exemple 31 $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$ par minoration, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \geqslant n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Corollaire 32 – Théorème d'encadrement bis

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. Si $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_n$, à partir d'un certain rang, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Démonstration. À partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_n$, soit $\ell - \varepsilon_n \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon_n$, or $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ell - \varepsilon_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (\ell + \varepsilon_n) = \ell$ et on conclut par encadrement. ■

Corollaire 33 – Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n u_n = 0$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $K \geqslant 0$ tel que $|u_n| \leqslant K$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique $0 \leqslant |\varepsilon_n u_n| \leqslant K|\varepsilon_n|$. Alors, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} |\varepsilon_n u_n| = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n u_n = 0$. ■

Exemple 34 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$. En effet, la suite $(\sin n)_{n\geqslant 0}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Théorème 35 – Limite d'une suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$.

	$a > 1$	$a = 1$	$\lvert a\rvert < 1$	$a \leqslant -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} a^n$	$+\infty$	1	0	Pas de limite

Démonstration. ... ■

Exemple 36 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite strictement positive et $\eta \in]0\,,1[$ telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \eta$, à partir d'un certain rang. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Théorème 37 – Comparaison exponentielles/factorielle

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

Démonstration. ... ■

Remarque 38 Les résultats de croissance comparée usuels concernant les fonctions restent naturellement valables pour les suites. Précisément, pour tous réels $a, b > 0$ et $q > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^b}{n^a} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{q^n} = 0,$$

en remarquant que $q^n = \mathrm{e}^{n\ln q}$.

4.2 Théorème de la limite monotone

Le théorème de la limite monotone est LE théorème d'EXISTENCE par excellence.

Théorème 39 – Théorème de la limite monotone

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle.

Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ EXISTE.

Précisément,

- si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante majorée (resp. décroissante minorée), alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge ;
- si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante NON majorée (resp. décroissante NON minorée), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration. ... ■

✖ ATTENTION ! ✖ Une suite croissante majorée par M converge... MAIS PAS NÉCESSAIREMENT VERS M, qui n'est qu'un majorant parmi d'autres !

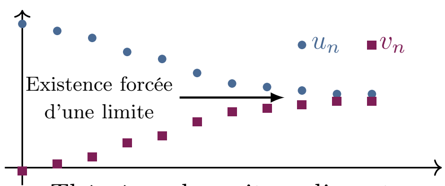
Exemple 40 La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{1}{p!}$, pour tout $n \geqslant 0$, est convergente.

4.3 Théorème des suites adjacentes

Définition 41 – Suites adjacentes

Deux suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont dites *adjacentes* lorsque l'une de ces suites est croissante, l'autre décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Remarque 42 Deux suites adjacentes sont deux suites qui viennent à la rencontre l'une de l'autre, l'une en croissant, l'autre en décroissant et qui finissent par s'écraser l'une contre l'autre, comme le suggère le théorème des suites adjacentes.



Théorème des suites adjacentes

Théorème 43 – Théorème des suites adjacentes

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites adjacentes, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers une limite commune ℓ. Précisément, si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ décroissante, alors, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $u_m \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Démonstration. ... ■

Remarque 44 Le théorème des suites adjacentes permet d'affirmer que les deux suites convergent vers la même limite ℓ. En revanche, déterminer cette limite est souvent un problème plus difficile. À minima l'encadrement $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ fournit-il des valeurs approchées de ℓ à une précision quelconque, puisque la différence $v_n - u_n$ tend vers 0.

Le résultat suivant n'est qu'une formulation alternative du théorème des suites adjacentes.

Exemple 45 – Théorème des segments emboîtés Soit $(I_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de segments de $\mathbb{R}$ vérifiant :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$;

(ii) la longueur du segment I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

alors il existe un unique réel ℓ appartenant à tous les segments I_n, autrement dit $\displaystyle\bigcap_{n\geqslant 0} I_n = \{\ell\}$.

Exemple 46 Soit x un réel. Les suites $(\lfloor 10^n x\rfloor 10^{-n})_{n\geqslant 0}$ et $(\lfloor 10^n x\rfloor 10^{-n} + 10^{-n})_{n\geqslant 0}$ des approximations décimales par défaut et par excès de x sont adjacentes et convergent vers x (cf. théorème 44 du chapitre 9).

5 Caractérisation séquentielle de certaines propriétés

Par « caractérisation séquentielle » il faut entendre « caractérisation à l'aide de suites ».

Théorème 47 – Caractérisation séquentielle de la borne supérieure/inférieure

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.

(i) $M = \sup A$ si et seulement si M majore A et est la limite d'une suite d'éléments de A.

(ii) A n'est pas majorée si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui diverge vers $+\infty$.

On dispose naturellement de résultat similaire pour les bornes inférieures et les parties non minorées.

Démonstration.

(i) Supposons d'abord que A admet M pour borne supérieure. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M - \dfrac{1}{n}$ ne majore pas A et A contient donc un élément $a_n \geqslant M - \dfrac{1}{n}$. Or la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est aussi majorée par M et, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = M$.
Réciproquement, faisons l'hypothèse que M majore A et est la limite d'une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de A. Soit M' un majorant de A, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant M'$ et donc $M \leqslant M'$, par passage à la limite. Ainsi, M est le plus petit majorant de A.

(ii) Supposons d'abord A non majorée. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque n ne majore pas A, A contient un élément $a_n \geqslant n$ et, par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. La réciproque est évidente. ■

Exemple 48 On note A l'ensemble $\left\{\dfrac{q}{2^p + q}\right\}_{p,q\in\mathbb{N}^*}$. Alors $\inf A = 0$ et $\sup A = 1$.

Théorème 49 – Caractérisation séquentielle des points adhérents d'une partie de $\mathbb{R}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) x est adhérent à A. **(ii)** x est la limite d'une suite d'éléments de A.

Démonstration. **(i) $\Longrightarrow$ (ii)** Supposons x adhérent à A.

- Si $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le voisinage $\left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[$ de x contient un élément a_n de A, et la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de A ainsi construite converge vers x, puisque $|x - a_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Si $x = +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le voisinage $]n, +\infty[$ de $+\infty$ contient un élément a_n de A, et la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de A ainsi construite diverge vers $+\infty$, par minoration. On raisonne de même si $x = -\infty$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Supposons que x est la limite d'une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de A. Soit $\mathscr{V}_x$ un voisinage de x. Par définition de la limite, $a_n \in \mathscr{V}_x$, à partir d'un certain rang N, ainsi $\mathscr{V}_x$ contient un élément de A. Par conséquent x est adhérent à A. ■

Exemple 50 Pour la partie A de l'exemple précédent, on a $\overline{A} = A \cup \{0, 1\}$.

La notion de « partie dense dans $\mathbb{R}$ », introduite à la définition 31 du chapitre 9, est liée à celle de point adhérent. Précisément, une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{A} = \mathbb{R}$, *i.e.* tout réel est adhérent à A.

Corollaire 51 – Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est dense dans $\mathbb{R}$. **(ii)** Tout réel est la limite d'une suite d'éléments de A.

Ainsi, d'après les résultats de densité obtenus au chapitre 9, tout réel est limite d'une suite de rationnels (resp. d'irrationnels, resp. de décimaux).

6 Extension aux suites complexes

Définition 52 – Suite complexe

On appelle *suite complexe* (ou *numérique*) toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

Les notions liées aux inégalités dans $\mathbb{R}$ (monotonie, majorant, minorant, etc.) n'ont aucun sens pour les suites complexes. On se contentera de la notion suivante.

Définition-théorème 53 – Suite bornée

- **Définition.** Une suite complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite *bornée* lorsque la suite réelle $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ est majorée, *i.e.*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M.$$

- **Caractérisation.** Une suite complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\geqslant 0}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\geqslant 0}$ le sont.

Démonstration. La caractérisation annoncée résulte des inégalités classiques :

$$|\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n|, \quad |\mathrm{Im}(u_n)| \leqslant |u_n| \quad \text{et} \quad |u_n| \leqslant |\mathrm{Re}(u_n)| + |\mathrm{Im}(u_n)|.$$

■

Définition-théorème 54 – Limite d'une suite complexe

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *admet ℓ pour limite* lorsque la suite réelle $(|u_n - \ell|)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0, *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Dans ce contexte, le théorème d'unicité de la limite reste valable, ce qui autorise la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration. Si la suite complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet ℓ et ℓ' pour limites, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\ell - \ell'| \leqslant |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

d'où $|\ell - \ell'| = 0$, par passage à la limite, soit $\ell = \ell'$. ■

✖ **Attention !** ✖ La notion de limite infinie n'a aucun sens pour une suite complexe.

Exemple 55 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z^n = 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

On définit alors comme précédemment pour les suites réelles les notions de *convergence* et de *divergence* et il est encore vrai qu'une suite convergente est bornée.

Théorème 56

Si la suite complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ, alors

(i) la suite $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ converge vers $|\ell|$ et, en particulier, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée ;

(ii) la suite $(\overline{u}_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\overline{\ell}$.

Démonstration. **(i)** découle de l'inégalité triangulaire : $\big||u_n| - |\ell|\big| \leqslant |u_n - \ell|$ et du théorème 22.
(ii) découle de l'égalité : $\left|\overline{u}_n - \overline{\ell}\right| = |u_n - \ell|$. ■

✖ **Attention !** ✖

- La réciproque du point **(i)** du théorème précédent est bien sûre fausse. Il suffit de considérer la suite $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$.
- Si une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ converge vers un compexe ℓ non nul, la suite des arguments principaux $(\arg(u_n))_{n\geqslant 0}$ ne converge pas en général, et a fortiori ne converge pas vers $\arg(\ell)$. Par exemple, la suite de terme général $u_n = -\,\mathrm{e}^{(-1)^n i\pi/n}$ converge vers -1, mais $\arg(u_{2n}) = -\pi + \dfrac{\pi}{2n}$ et $\arg(u_{2n+1}) = \pi - \dfrac{\pi}{2n+1}$.

Théorème 57 – Caractérisation de la limite par les parties réelle et imaginaire

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. **(ii)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(\ell)$.

Démonstration.

- L'implication **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** est une conséquence des inégalités
$$|\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)| \leqslant |u_n - \ell| \quad \text{et} \quad |\mathrm{Im}(u_n) - \mathrm{Im}(\ell)| \leqslant |u_n - \ell|$$
et du théorème d'encadrement (corollaire 32) pour les suites réelles.
- L'implication **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)** est une conséquence de l'inégalité
$$|u_n - \ell| \leqslant |\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)| + |\mathrm{Im}(u_n) - \mathrm{Im}(\ell)|$$
et du théorème d'encadrement (corollaire 32) pour les suites réelles. ■

Exemple 58

- La suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^n} + \left(2 + \dfrac{1}{n}\right)i$ converge vers $1+2i$, dans la mesure où les suites $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\geqslant 0}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\geqslant 0}$ convergent respectivement vers 1 et 2.
- La suite de terme général $u_n = 1 + ni$ diverge, dans la mesure où la suite $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\geqslant 0}$ diverge.

Par ailleurs, les théorèmes opératoires sur les limites (addition, produit, inverse, quotient) restent valables, modulo la suppression des colonnes liées aux cas $\pm\infty$ des tables de la section 3.1.

En revanche, les théorèmes cruciaux d'existence de limite de la section 4 (théorèmes d'encadrement / majoration / minoration, théorème de la limite monotone et théorème des suites adjacentes) n'ont aucun sens dans le cas complexe, dans la mesure où ces théorèmes s'appuient de façon essentielle sur la relation d'ordre de $\mathbb{R}$.

7 Suites extraites

Définition 59 – Suite extraitre, valeur d'adhérence

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe.

- **Suite extraite.** On appelle *suite extraite* (ou *sous-suite*) *de* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ toute suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ où φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ – on parle de *fonction d'extraction* ou d'*extractrice*.
- **Valeur d'adhérence.** On appelle *valeur d'adhérence de* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ toute limite FINIE d'une sous-suite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

La fonction d'extraction φ n'est rien d'autre qu'une suite strictement croissante d'entiers naturels tenant le rôle de nouveaux indices. Par exemple, si $\varphi = (2, 3, 7, 14, 23, 128\ldots)$, alors $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ est la suite $(u_2, u_3, u_7, u_{14}, u_{23}, u_{128}, \ldots)$.

Exercice 60

- Les suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
- Les suites constantes égales à 1 et -1 respectivement sont deux suites extraites de la suite de terme général $(-1)^n$. Les réels 1 et -1 sont donc deux valeurs d'adhérence de cette suite.

Remarque 61 – Extractions successives La suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ n'est jamais que la composée d'applications $u\circ\varphi$. Par conséquent, une suite extraite de cette sous-suite, via une extractrice ψ, est la suite $u\circ\varphi\circ\psi = \left(u_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$, et non la suite $u\circ\psi\circ\varphi = \left(u_{\psi\circ\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$!

Remarque 62 L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est inclus dans l'adhérence de l'ensemble de ses valeurs, *i.e.* $\overline{\{u_n \mid n\in\mathbb{N}\}}$.

Lemme 63

Si φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors $\varphi(n)\geqslant n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Démonstration. Il suffit de procéder par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$. ∎

Théorème 64 – Limites et suites extraites

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle (resp. complexe) et $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathbb{C}$).

(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors, pour toute fonction $\varphi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ strictement croissante, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$.
En particulier, si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge, alors sa limite est sa seule valeur d'adhérence.

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$.

Démonstration. ... ∎

✎ **En pratique** ✎ Le point **(i)** du théorème précédent permet notamment de montrer qu'une suite n'a pas de limite. Il suffit en effet pour cela d'en exhiber deux sous-suites ayant des limites différentes.

Exemple 65

- La suite de terme général $(-1)^n$ n'a pas de limite, dans la mesure où $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^{2n+1} = -1$.
- La suite de terme général $u_n = \mathrm{e}^{ni\pi/2}$ est divergente, dans la mesure où $(u_{2n})_{n\geqslant 0} = ((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ en est une sous-suite divergente.
- Pour tout $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} z^{2^n} = 0$, dans la mesure où $\left(z^{2^n}\right)_{n\geqslant 0}$ est une suite extraite de la suite géométrique $(z^n)_{n\geqslant 0}$ qui converge vers 0.
- La réciproque du point **(i)** du théorème 64 est fausse. En effet, la suite de terme général $(1+(-1)^n)n$ admet 0 pour unique valeur d'adhérence, mais elle diverge (cf. corollaire 67).

Le théorème suivant, aux conséquences théoriques importantes, offre une réciproque partielle au théorème 22.

Théorème 66 – Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite complexe bornée possède une sous-suite convergente.

Démonstration. Cf. annexe A ∎

Le théorème de Bolzano-Weierstrass† est fondamentalement un théorème d'existence qui affirme que l'on peut toujours extraire une suite convergente d'une suite complexe bornée. Intuitivement, cela revient à dire que les valeurs d'une suite bornée doivent nécessairement s'accumuler quelque part, en l'occurence autour au moins d'un point, qui sera alors une valeur d'adhérence de la suite.

†. Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815 à Ostenfelde (province de Westphalie) – 1897 à Berlin) est un mathématicien allemand, qui s'attacha à définir de façon rigoureuse des notions essentielles de l'analyse (continuité, dérivabilité, ...). On lui doit aussi le premier exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable en aucun point.
Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781 à Prague – 1848 à Prague) est un mathématicien, logicien (avec une contribution majeure à la téhorie des prédicats), philosophe et théologien. L'influence de ses ouvrages philosophiques est importante, tout comme ses découvertes en mathématiques.

Corollaire 67 – (Programme de deuxième année MP)
Une suite complexe BORNÉE converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Démonstration. ... ■

8 Étude de quelques suites récurrentes

8.1 Suites récurrentes linéaires

Dans l'ensemble de ce paragraphe $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

8.1.1 Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques

Définition-théorème 68 – Suite arithmétique/géométrique
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite numérique et $q, r \in \mathbb{K}$.

- La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite *arithmétique de raison r* lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
  Le cas échéant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$ et plus généralement, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + (n-p)r$.
- La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite *géométrique de raison q* lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.
  Le cas échéant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$ et plus généralement, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $u_n = q^{n-p} u_p$.

Démonstration. Récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. ■

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "+r/\times q"] \arrow[rr, bend right, "+2r/\times q^2"'] \arrow[rrrr, bend right=50, "+nr/\times q^n"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r/\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, "+r/\times q"] \arrow[rr, bend right, "+(n-2)r/\times q^{n-2}"'] & \dots \arrow[r, bend left, "+r/\times q"] & u_n \arrow[r, bend left, "+r/\times q"] & u_{n+1} \arrow[r, bend left, "+r/\times q"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Définition-théorème 69 – Suite arithmético-géométrique
Soit $a, b \in \mathbb{K}$. Une suite numérique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite *arithmético-géométrique (de raison a et de second membre b)* lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$. Le cas échéant, deux situations peuvent se présenter :

- soit $a = 1$, auquel cas la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est arithmétique ;
- soit $a \neq 1$, auquel cas l'équation $x = ax + b$ possède une et une seule solution ℓ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est de la forme $(\ell + \lambda a^n)_{n\geqslant 0}$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$. Le complexe ℓ est appelé le *point fixe* de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Démonstration. Supposons $a \neq 1$, alors

$$x = ax + b \iff (1-a)x = b \iff x = \frac{b}{1-a}.$$

Il suffit alors de soustraire membre à membre les deux égalités $\left\{\begin{array}{ll} u_{n+1} & = au_n + b \\ \ell & = a\ell + b, \end{array}\right.$ pour obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \ell = au_n + b - (a\ell + b) = a(u_n - \ell),$$

ce qui montre que $(u_n - \ell)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison a et donc de la forme $(\lambda a^n)_{n\geqslant 0}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$. ■

Comme son nom l'indique, une suite arithmético-géométrique vérifie une relation de récurrence qui est une sorte de combinaison des cas arithmétique et géométrique. En particulier, avec les notations de la définition précédente, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante lorsque $a = 0$, arithmétique lorsque $a = 1$ et géométrique lorsque $b = 0$.

✎ **En pratique** ✎ La valeurs de λ est obtenue en considérant le terme initial u_0 de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Exemple 70 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 8$. Alors, $u_u = -2 \times 3^n + 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 71 – Analogie avec les équations différentielles linéaires d'ordre 1. On sait que la résolution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = ay + b$ s'effectue en deux étapes : recherche des solutions de l'équation homogène associée $y' = ay$, auxquelles on ajoute une solution particulière de l'équation avec second membre. De façon similaire, pour la relation de récurrence linéaire $u_{n+1} = au_n + b$:

- la relation de récurrence linéaire homogène associée est $u_{n+1} = au_n$ et cette dernière est vérifiée par les suites géométriques $(\lambda a^n)_{n\geqslant 0}$ de raison a avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (ce sont LES solutions de l'équation homogène associée) ;
- pour la relation avec second membre, on distingue deux cas :
  - × lorsque $a \neq 1$, on peut chercher une solution particulière constante, c'est le réel ℓ solution de l'équation $x = ax+b$;
  - × lorsque $a = 1$, la suite est arithmétique et on obtient une solution particulière de degré 1 en n avec $(bn)_{n\geqslant 0}$.

Dans tous les cas, les suites solutions sont obtenues en sommant les solutions de la relation de récurrence linéaire homogène avec une solution particulière. Enfin, le cas échéant, le paramètre λ est uniquement déterminé par la valeur initiale u_0 (analogue du problème de Cauchy).

8.1.2 Suites récurrentes linéaires homogènes du second ordre

Définition-théorème 72 – Suite récurrente linéaire homogène du second ordre

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $ac \neq 0$. Une suite numérique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite *récurrente linéaire homogène du second ordre de polynôme caractéristique* $aX^2 + bX + c$ lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0. \tag{1}$$

La forme du terme général des suites vérifiant (1) est alors dictée par le nombre de racines du polynôme caractéristique.

- **Cas complexe $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.**

Discriminant Δ de $aX^2 + bX + c$	Racine(s) de $aX^2 + bX + c$	Forme des solutions
$\Delta \neq 0$	r et s	$\left(\lambda r^n + \mu s^n\right)_{n\geqslant 0}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
$\Delta = 0$	r	$\left((\lambda n + \mu) r^n\right)_{n\geqslant 0}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

- **Cas réel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.**

Discriminant Δ de $aX^2 + bX + c$	Racine(s) de $aX^2 + bX + c$	Forme des solutions
$\Delta > 0$	r et s	$\left(\lambda r^n + \mu s^n\right)_{n\geqslant 0}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	r	$\left((\lambda n + \mu) r^n\right)_{n\geqslant 0}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	$\rho\, e^{\pm i\theta}$	$\left(\rho^n(\lambda \sin(n\theta) + \mu \cos(n\theta))\right)_{n\geqslant 0}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Démonstration. Cf. annexe A. Une preuve plus systématique sera proposée au chapitre 23. ■

✎ **En pratique** ✎ Les valeurs de λ et μ sont obtenues en considérant les termes initiaux u_0 et u_1 de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Remarque 73 On notera l'analogie totale du théorème 72 avec le théorème 19 du chapitre 8 donnant la structure de l'ensemble des solutions des équations différentielles linéaires homogènes du second ordre, où les suites géométriques sont l'analogue discret des fonctions exponentielles. Cette analogie n'est pas fortuite et sera démystifiée au chapitre 23.

Exemple 74 La suite $(n)_{n\geqslant 0}$ est l'unique suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n, \ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Exemple 75 Il existe une unique suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$. Elle est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \cos\dfrac{n\pi}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{n\pi}{3}$.

8.2 Étude des suites récurrentes « $u_{n+1} = f(u_n)$ »

On pourrait croire que pour définir une suite par récurrence, il suffit de se donner une fonction f quelconque, un réel u_0 dans le domaine de définition de f et de décréter que « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». Il n'en est rien !

Considérons par exemple la fonction $f : x \longmapsto 2+\sqrt{2-x}$ définie sur $]-\infty\,,2]$ et posons $u_0 = 1$. Alors $f(u_0) = f(1) = 3$ et on peut poser $u_1 = 3$. Mais ensuite $f(3)$ n'a aucun sens ! Quelle valeur pourrait-on alors donner à u_2 ? On ne définit pas ainsi une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Définition 76 – Partie stable par une fonction

Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une fonction. Une partie D de E est dite *stable par* f lorsque $f[D] \subset D$, *i.e.* $f(x) \in D$, pour tout $x \in D$.

Exemple 77 L'intervalle $]0\,,+\infty[$ est stable par la fonction inverse, puisque, pour tout $x \in]0\,,+\infty[$, $\dfrac{1}{x} > 0$.

Théorème 78 – Existence de suites récurrentes définies par une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ »

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow D$ une fonction – ainsi D est stable par f.
Pour tout $\delta \in D$, il existe une et une seule suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $u_0 = \delta$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Cette suite est évidemment à valeurs dans D.

Démonstration. On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: « le terme d'indice n est défini de manière unique par les relations $u_0 = \delta$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = f(u_k)$, et on a $u_n \in D$ ». ■

Pour définir $(u_n)_{n\geqslant 0}$ on a besoin de composer et re-composer f par elle-même autant de fois que l'on veut. C'est justement ce que nous garantit la stabilité de D par f : $u_n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}(u_0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✎ **En pratique** ✎ Le fait que la suite ainsi définie soit à valeurs dans D est extrêmement pratique pour établir que cette suite est minorée/majorée/bornée. Il suffit pour cela que D le soit.

Exemple 79 Il existe une unique suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln\big(1+\sqrt{u_n}\big)$.
En effet, d'une part $2 \in \mathbb{R}_+$ et l'intervalle $\mathbb{R}_+$ est stable par la fonction $x \longmapsto \ln(1+\sqrt{x})$, puisque, pour tout $x \geqslant 0$, $1+\sqrt{x} \geqslant 1$.

Remarque 80 Les résultats du théorème 78 se généralisent à des relations de récurrence à p termes de la forme $u_{n+p} = f(u_{n+p-1}, \ldots, u_n)$ avec $f : D^p \longrightarrow D$. Précisément, pour tout $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in D^p$, il existe une unique suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant

$$u_0 = a_0,\ \ldots,\ u_{p-1} = a_{p-1} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+p} = f(u_{n+p-1}, \ldots, u_n).$$

On procède là aussi par récurrence (à l'ordre p) sur $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 81 La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ diverge vers $+\infty$.
En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$, ainsi la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante. Elle admet donc une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, d'après le théorème de la limite monotone. Supposons par l'absurde que ℓ est finie. Alors, par opérations sur les limites,

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \big(u_n + u_n^2\big) = \ell + \ell^2,$$

ce qui impose $\ell = 0$. Or $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée par $u_0 > 0$, donc $\ell \geqslant u_0 > 0$ – contradiction !

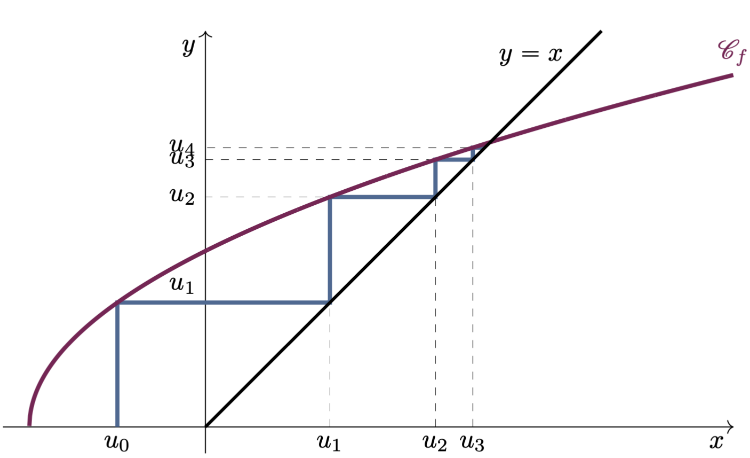
Théorème 82 – Monotonie d'une suite récurrente définie par une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ »

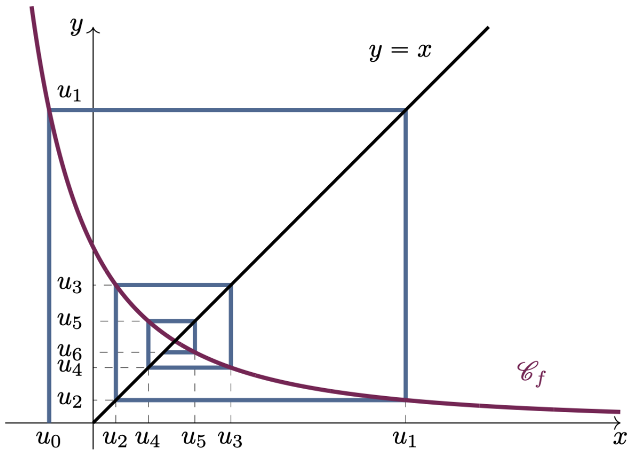
Soit D une partie de $\mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow D$ une fonction (D est stable par f) et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 \in D$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- **(i)** Si $f(x) \geqslant x$ (resp. $f(x) \leqslant x$), pour tout $x \in D$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante (resp. décroissante). Ainsi la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ peut être établie via une étude du signe de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$.
- **(ii)** Si f est croissante sur D, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone. Précisément, son sens de variation dépend de la position de u_0 vis-à-vis de u_1.
- **(iii)** Si f est décroissante sur D, alors les sous-suites suite $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont monotones de sens contraires. Cette fois, leurs sens de variation dépendent de la position de u_0 vis-à-vis de u_2.

Démonstration. Puisque D est stable par f, on a $u_n \in D$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **(i)** Il suffit d'observer que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **(ii)** Récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}$, en distinguant les deux cas ($u_0 \leqslant u_1$ et $u_0 \geqslant u_1$).
- **(iii)** Supposons f décroissante sur D et $u_0 \leqslant u_2$. Alors $f \circ f$ est croissante et $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ est croissante d'après **(ii)**. En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}$, par décroissance de f, ainsi $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ est décroissante. On procède de même pour $u_0 \geqslant u_2$. ■





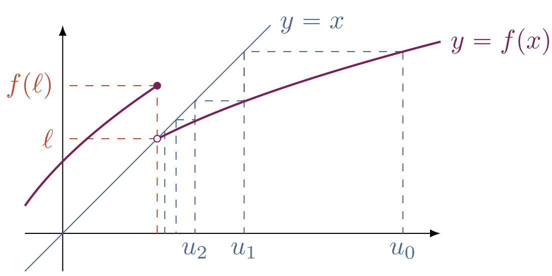
Remarque 83 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_{2n}) = u_{2n+1}$, mais $f \circ f(u_{2n}) = u_{2n+2}$ et $f \circ f(u_{2n+1}) = u_{2n+3}$. Ainsi les suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont récurrentes associées à la fonction $f \circ f$.

Théorème 84 – Limite d'une suite récurrente convergente définie par une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ »

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow D$ une fonction (D est stable par f) et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 \in D$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ CONVERGE vers $\ell \in D$ et si f est CONTINUE en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f, *i.e.* vérifie $f(\ell) = \ell$.

Démonstration. Puisque f est continue en ℓ, $\lim\limits_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$, par composition. Mais on a aussi $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$, ainsi $f(\ell) = \ell$. ■



✖ **ATTENTION !** ✖ L'hypothèse de continuité n'est pas là pour décorer ! Sur la figure ci-contre $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ mais $f(\ell) \neq \ell$.

✎ **En pratique** ✎ Pour étudier une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$:

- On se place sur une partie D de $\mathbb{R}$ stable par f ;
- On étudie les variations et les points fixes de f ;
- On étudie le signe de la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$, qui nous renseigne sur les variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Notons que les points fixes de f sont les solutions de l'équation $g(x) = 0$.

Exemple 85 Soit la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Si $u_0 = 0$, alors la suite converge vers 0, et si $u_0 > 0$, alors la suite converge vers 1.

Exemple 86 La suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Compétences à acquérir

- Étudier la monotonie d'une suite : exercices 5 à 8.
- Obtenir une limite de suite par opérations ou encadrement : exercices 2 à 4.
- Obtenir la convergence/divergence d'une suite en revenant à la définition (utilisation des ε) : exercices 9 à 17.
- Établir que des suites sont adjacentes : exercices 5 à 8.
- Utiliser la caractérisation séquentielle des bornes inf/sup, de l'adhérence, de la densité : exercices 18 à 20.
- Utiliser la notion de suite extraite, déterminer les valeurs d'adhérence d'une suite : exercices 24 à 34.
- Étudier une suite récurrente linéaire : exercices 37 à 39.
- Étudier une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$: exercices 40 à 45 et 23.
- Étudier une suite définie implicitement : exercices 47 à 51.

Quelques résultats classiques :

- Théorème des segments emboîtés (exemple 45).
- Irrationalité de e (exercice 7).
- Une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est stationnaire (exercice 10).
- Théorème de Cesàro (exercice 13).
- Une suite non majorée admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$ (exercice 27).
- Divergence des suites $(\sin(n\theta))_{n\geqslant 0}$ et $(\cos(n\theta))_{n\geqslant 0}$ pour $\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ (exercice 33).

A Preuves

Limites pas opérations (paragraphe 3.1)

- **Somme $\ell + (+\infty)$.** On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
  Soit $A > 0$. Par hypothèse,
  × $|u_n - \ell| < 1$, à partir d'un certain rang N, donc, en particulier, $u_n > \ell - 1$;
  × $v_n > A - \ell + 1$, à partir d'un certain rang N'.
  Ainsi, pour tout $n \geqslant \max\{N, N'\}$, $u_n + v_n > (\ell - 1) + (A - \ell + 1) = A$, ce qui établit $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$.
- **Somme $+\infty + (+\infty)$.** On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
  Soit $A > 0$. Par hypothèse, $u_n > A$, à partir d'un certain rang N, et $v_n > 0$, à partir d'un certain rang N'. Ainsi, pour tout $n \geqslant \max\{N, N'\}$, $u_n + v_n > A + 0 = A$, ce qui établit $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$.
- **Produit $\ell \times (+\infty)$ avec $\ell > 0$.** On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
  Soit $A > 0$. Par hypothèse,
  × $|u_n - \ell| < \frac{\ell}{2}$, à partir d'un certain rang N, donc, en particulier, $u_n > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0$;
  × $v_n > \frac{2A}{\ell}$, à partir d'un certain rang N'.
  Ainsi, pour tout $n \geqslant \max\{N, N'\}$, $u_n v_n > \frac{\ell}{2} \times \frac{2A}{\ell} = A$, ce qui établit $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = +\infty$.
- **Produit $+\infty \times (+\infty)$.** On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
  Soit $A > 0$. Par hypothèse, $u_n > A$, à partir d'un certain rang N, et $v_n > 1$, à partir d'un certain rang N'. Ainsi, pour tout $n \geqslant \max\{N, N'\}$, $u_n v_n > A \times 1 = A$, ce qui établit $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = +\infty$.
- **Inverse $\dfrac{1}{+\infty}$.** On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $u_n > \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$, à partir d'un certain rang N. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, $\left|\dfrac{1}{u_n}\right| = \dfrac{1}{u_n} < \varepsilon$, ce qui établit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.
- **Inverse $\dfrac{1}{0^+}$.** On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$, notamment $u_n > 0$, à partir d'un certain rang N.
  Soit $A > 0$. Par hypothèse, $|u_n| < \dfrac{1}{A}$, à partir d'un certain rang N'. Ainsi, pour tout $n \geqslant \max\{N, N'\}$, $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{|u_n|} > A$, ce qui établit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.

Les cas restants sont similaires.

Preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass (théorème 66)

Cas réel. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle bornée. Désignons par m et M respectivement un minorant et un majorant de cette suite.

- **Etape 1.** Commençons par construire une suite de segments emboîtés $I_n = [a_n\,, b_n]$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$ soit infini.
  × $I_0 = [m\,, M]$ convient.
  × Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose construit I_n tel que $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$ soit infini. Posons $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Si $[a_n\,, c_n]$ est tel que $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_n\,, c_n]\}$ soit infini, on pose $I_{n+1} = [a_n\,, c_n]$. Sinon, $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [c_n\,, b_n]\}$ est nécessairement infini, et on pose $I_{n+1} = [c_n\,, b_n]$.

  On a ainsi construit une suite décroissante de segments $(I_n)_{n\geqslant 0}$ dont les longueurs $(M - m)/2^n$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il existe alors un unique réel ℓ tel que $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} I_n = \{\ell\}$ (cf. exemple 45) et $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.
- **Etape 2.** Nous allons maintenant extraire une sous-suite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge vers ℓ. Construisons pour cela par récurrence une extractrice φ telle que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}$.
  × On pose $\varphi(0) = 0$, et on a donc $a_0 \leqslant u_{\varphi(0)} \leqslant b_0$.
  × Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons avoir défini $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n-1)$ vérifiant
  $$\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n-1) \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0\,, n-1]\!],\quad a_k \leqslant u_{\varphi(k)} \leqslant b_k.$$
  Puisque l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} \mid u_p \in I_n\}$ est infini, il n'est pas majoré et contient donc des éléments strictement supérieurs à $\varphi(n-1)$. Posons, par exemple, $\varphi(n) = \min\{p \in \mathbb{N} \mid u_p \in I_n \;\text{ et }\; p > \varphi(n-1)\}$, alors, par construction
  $$\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n-1) < \varphi(n) \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0\,, n]\!],\quad a_k \leqslant u_{\varphi(k)} \leqslant b_k.$$

  On a ainsi défini une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que
  $$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n.$$
  Il en découle, par le théorème d'encadrement, que la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ.

Cas complexe. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe bornée.

- La suite réelle $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\geqslant 0}$ est bornée (théorème 53), il existe donc une extractrice φ telle que la suite $\big(\mathrm{Re}\big(u_{\varphi(n)}\big)\big)_{n\geqslant 0}$ converge, d'après le cas précédent.
- La suite réelle $\big(\mathrm{Im}\big(u_{\varphi(n)}\big)\big)_{n\geqslant 0}$, extraite de la suite $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\geqslant 0}$ bornée, est bornée (théorème 53), il existe donc une extractrice ψ telle que la suite $\big(\mathrm{Im}\big(u_{\varphi\circ\psi(n)}\big)\big)_{n\geqslant 0}$ converge, d'après le cas précédent.

Au total, les suites $\big(\mathrm{Im}\big(u_{\varphi\circ\psi(n)}\big)\big)_{n\geqslant 0}$ et $\big(\mathrm{Re}\big(u_{\varphi\circ\psi(n)}\big)\big)_{n\geqslant 0}$ (suite extraite d'une suite convergente (théorème 64)) sont convergentes. Par conséquent, il en va de même de la suite $\big(u_{\varphi\circ\psi(n)}\big)_{n\geqslant 0}$ (théorème 57).

Preuve du théorème 72

Soit $a, b, \in \mathbb{K}$, avec $ac \neq 0$, et $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire du second ordre de polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$.

Principe de la preuve. Soit $(\delta_n)_{n\geqslant 0}$ une suite. Si $\begin{cases} \delta_0 = \delta_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a\delta_{n+2} + b\delta_{n+1} + c\delta_n = 0, \end{cases}$ alors $(\delta_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite nulle.

Nous allons procéder par analyse-synthèse dans les deux premiers cas.

Cas où $aX^2 + bX + c$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{K}$ ($\Delta \neq 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\Delta > 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
Notons r et s ces deux racines.

- **Analyse.** Supposons qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r^n + \mu s^n$. En particulier,

$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 & (n=0) \\ r\lambda + s\mu = u_1 & (n=1) \end{cases} \underset{r\neq s}{\iff} \lambda = \frac{su_0 - u_1}{s-r} \text{ et } \mu = \frac{u_1 - ru_0}{s-r}.$$

- **Synthèse.** Posons $\lambda = \dfrac{su_0 - u_1}{s-r}$, $\mu = \dfrac{u_1 - ru_0}{s-r}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n = u_n - \lambda r^n - \mu s^n$. D'une part, d'après le point précédent, on a $\delta_0 = \delta_1 = 0$ et, d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a\delta_{n+2} + b\delta_{n+1} + c\delta_n = \underbrace{au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n}_{=0} - \lambda \underbrace{\left(ar^{n+2} + br^{n+1} + cr^n\right)}_{=r^n\left(ar^2+br+c\right)=0} - \mu \underbrace{\left(as^{n+2} + bs^{n+1} + cs^n\right)}_{=s^n\left(as^2+bs+c\right)=0} = 0.$$

La suite $(\delta_n)_{n\geqslant 0}$ est donc nulle, ce qui conclut dans ce cas.

Cas où $aX^2 + bX + c$ admet une racine double dans $\mathbb{K}$ ($\Delta = 0$). Notons $r = -\dfrac{b}{2a}$ cette racine double et remarquons qu'elle est non nulle, puisque $b^2 = 4ac \neq 0$.

- **Analyse.** Supposons qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda n + \mu) r^n$. En particulier,

$$\begin{cases} \mu = u_0 & (n=0) \\ r\lambda + r\mu = u_1 & (n=1) \end{cases} \underset{r\neq 0}{\iff} \lambda = \frac{u_1 - ru_0}{r} \text{ et } \mu = u_0.$$

- **Synthèse.** Posons $\lambda = \dfrac{u_1 - ru_0}{r}$, $\mu = u_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n = u_n - (\lambda n + \mu) r^n$. D'une part, d'après le point précédent, on a $\delta_0 = \delta_1 = 0$ et, d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a\delta_{n+2} + b\delta_{n+1} + c\delta_n &= \underbrace{au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n}_{=0} - \lambda\big(a(n+2)r^{n+2} + b(n+1)r^{n+1} + cnr^n\big) - \mu \underbrace{\left(ar^{n+2} + br^{n+1} + cr^n\right)}_{=r^n\left(ar^2+br+c\right)=0} \\ &= -\lambda\Big(\underbrace{(ar^2 + br + c)}_{=0} nr^n + \underbrace{(2ar + b)}_{=0} r^{n+1}\Big) = 0. \end{aligned}$$

La suite $(\delta_n)_{n\geqslant 0}$ est donc nulle, ce qui conclut dans ce cas.

Cas où $aX^2 + bX + c$ n'admet pas de racine dans $\mathbb{K}$ ($\Delta < 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Les racines de $aX^2 + bX + c$ dans $\mathbb{C}$ sont complexes conjuguées distinctes, disons $\rho\,\mathrm{e}^{\pm i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$. Les calculs effectués dans le premier cas restent valables dans $\mathbb{C}$, ainsi $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est de la forme $\left(\alpha\rho^n\,\mathrm{e}^{in\theta} + \beta\rho^n\,\mathrm{e}^{-in\theta}\right)_{n\geqslant 0}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Or $\mathrm{Im}(u_0) = \mathrm{Im}(u_1) = 0$ et on a les équivalences

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(u_0) = 0 \\ \mathrm{Im}(u_1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{Im}(\alpha + \beta) = 0 \\ \mathrm{Im}\big(\alpha\,\mathrm{e}^{i\theta} + \beta\,\mathrm{e}^{-i\theta}\big) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{Im}(\beta) = -\mathrm{Im}(\alpha) \\ (\mathrm{Im}(\alpha) + \mathrm{Im}(\beta))\cos\theta + (\mathrm{Re}(\alpha) - \mathrm{Re}(\beta))\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{Im}(\beta) = -\mathrm{Im}(\alpha) \\ (\mathrm{Re}(\alpha) - \mathrm{Re}(\beta))\sin\theta = 0 \end{cases} \underset{\theta\in\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}}{\iff} \begin{cases} \mathrm{Im}(\beta) = -\mathrm{Im}(\alpha) \\ \mathrm{Re}(\beta) = \mathrm{Re}(\alpha), \end{cases}$$

ainsi $\beta = \overline{\alpha}$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \alpha\rho^n\,\mathrm{e}^{in\theta} + \overline{\alpha}\rho^n\,\mathrm{e}^{-in\theta} = 2\rho^n\,\mathrm{Re}\Big(\alpha\,\mathrm{e}^{in\theta}\Big) = \rho^n(\lambda\sin(n\theta) + \mu\cos(n\theta)),$$

en posant $\lambda = -2\,\mathrm{Im}(\alpha)$ et $\mu = 2\,\mathrm{Re}(\alpha)$.