

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} est l'un des corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} [†] et les lettres m, n, p, \dots désignent des entiers naturels non nuls. Le mot « *scalaire* » signifiera « élément de \mathbb{K} » – cette appellation sera démystifiée lorsque nous introduirons la notion d'*espace vectoriel* au chapitre 21.

1 Matrices

1.1 L'ensemble des matrices

Définition 1 – Matrice, coefficients, lignes, colonnes, matrice nulle, matrices élémentaires

- On appelle *matrice à n lignes et p colonnes* (ou *de taille $n \times p$*) à *coefficients dans le corps \mathbb{K}* toute famille A de np éléments de \mathbb{K} présentée sous forme d'un tableau

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \quad \text{notée aussi } (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}, \quad \text{où } a_{i,j} \in \mathbb{K}, \text{ pour tous } (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket.$$

Le scalaire $a_{i,j}$ est appelé *coefficient de A de position (i, j)* , la matrice $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ est appelée la *j^e colonne de A* et la matrice $(a_{i,1} \ a_{i,2} \ \cdots \ a_{i,p})$ est appelée la *i^e ligne de A* .

- L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
 - × Lorsque $n = p$, on parle de *matrices carrées de taille n* et la notation abrégée $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est privilégiée. Le n -uplet $(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$ est alors appelé *diagonale de A* .
 - × Lorsque $p = 1$, on parle de *matrices colonnes de tailles n* et, lorsque $n = 1$, de *matrices lignes de taille p* .
- La matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée la *matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$* et notée 0, ou $0_{n,p}$ pour éviter toute confusion.
- Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $E_{i,j}^{(n,p)}$ (ou plus simplement $E_{i,j}$) la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui de position (i, j) égal à 1, appelée *matrice élémentaire d'indice (i, j) dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$* .

Remarque 2

- Formellement, une matrice A de taille $n \times p$ à coefficients dans \mathbb{K} n'est autre qu'un élément de $\mathbb{K}^{\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$, i.e. une famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ d'éléments de \mathbb{K} indexées par $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, soit fondamentalement une application $A : \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \longrightarrow \mathbb{K}$.
- Par définition, deux matrices sont égales lorsqu'elles ont même taille et mêmes coefficients.
- On dispose de l'inclusion $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.
- Par convention dans ce cours, si A désigne une matrice de taille $n \times p$, nous noterons généralement $a_{i,j}$ ou $A_{i,j}$ (ou a_{ij}/A_{ij} pour abrégé) le coefficient de A en position (i, j) .
- Par convention, lorsqu'une matrice contient beaucoup de zéros, on omet souvent de les noter, par souci de lisibilité.

Exemple 3 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est de taille 2×3 . Sa 1^{re} ligne est la matrice ligne $(1 \ 2 \ 3)$ de taille 3 et sa 3^e colonne la matrice colonne $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ de taille 2.

Notation 4 – Symbole de Kronecker[†] Soit I un ensemble non vide quelconque. On appelle *symbole de Kronecker* la notation définie par

$$\forall i, j \in I, \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

†. À l'exception notable de la notion de matrice antisymétrique (paragraphe 3.2), l'ensemble des définitions et théorèmes de ce chapitre restent valables sur un corps \mathbb{K} quelconque.

Exemple 5 – Coefficients des matrices élémentaires Pour tout $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, $E_{k,l} = (\delta_{i,k} \delta_{j,l})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

En effet, pour tous $i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j, l \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\delta_{i,k} \delta_{j,l} = 1 \iff \delta_{i,k} = \delta_{j,l} = 1 \iff i = k \text{ et } j = l$.

1.2 Opérations matricielles

1.2.1 Addition matricielle et multiplication par un scalaire

Définition 6 – Addition matricielle et multiplication par un scalaire

Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on note $\lambda A + \mu B$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$(\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \cdots & \lambda a_{1p} + \mu b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} + \mu b_{n1} & \cdots & \lambda a_{np} + \mu b_{np} \end{pmatrix},$$

appelée une *combinaison linéaire de A et B*.

Ainsi l'addition de matrices et la multiplication par un scalaire d'une matrice se font coefficients par coefficients. Autrement dit, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\underbrace{(\lambda A + \mu B)_{ij}}_{\text{coeff. } (i,j) \text{ de } \lambda A + \mu B} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij}.$$

En particulier, les propriétés de l'addition matricielle sont celles de l'addition dans \mathbb{K} .

Théorème 7 – Propriétés de l'addition matricielle et de la multiplication par un scalaire

Pour tous $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

(i) Commutativité. $A + B = B + A$

(ii) Associativité. $A + (B + C) = (A + B) + C$.

(iii) Élément neutre. $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$.

(iv) Élément opposé. $A + (-A) = 0_{n,p}$.

Autrement dit, $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien.

(v) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

(vi) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

(vii) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

(viii) $1 \cdot A = A$.

Démonstration. Exercice. Notons que la structure de groupe abélien de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ découle de celle de $(\mathbb{K}, +)$ (théorème 31 du chapitre 11). ■

Exemple 8

$$\begin{aligned} \bullet \quad & 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 - 2 \times 1 & 3 \times 1 - 2 \times 1 \\ 3 \times 0 - 2 \times (-2) & 3 \times 4 - 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}. \\ \bullet \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+(-2) & 4+0 \\ -1+4 & 3+(-1) & -7+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

✖ ATTENTION ! ✖ Une combinaison linéaire de deux matrices de tailles différentes n'a aucun sens !

Corollaire 9

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} E_{i,j}$, où, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, $E_{i,j}$ est la matrice élémentaire d'indice (i, j) dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration. ... ■

‡. Leopold Kronecker (1823 à Legnica (Prusse) – 1891 à Berlin) est un mathématicien et logicien allemand.

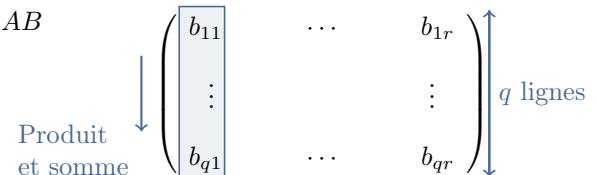
1.2.2 Produit matriciel

Définition 10 – Produit matriciel

Pour tous $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on note $A \times B$ ou AB la matrice $\left(\sum_{k=1}^q a_{ik} b_{kj} \right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq r}$ de taille $p \times r$.

Ainsi, le coefficient en position (i, j) de la matrice AB est

$$\sum_{k=1}^q a_{ik} b_{kj}.$$



$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{cccc} \sum_{k=1}^q a_{1k} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^q a_{1k} b_{kr} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^q a_{pk} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^q a_{pk} b_{kr} \end{array} \right)$$

Exemple 11 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 3 \\ 7 & -3 & 10 & -11 \\ 2 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$

Théorème 12 – Propriétés du produit matriciel, matrice identité

- Associativité.** Pour tous $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, $(AB)C = A(BC)$.
- Bilinéarité.** Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C, D \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC \quad \text{et} \quad B(\lambda C + \mu D) = \lambda BC + \mu BD.$$

- Élément neutre.** On appelle *matrice identité* (de taille n) la matrice carrée de taille n : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ et, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I_n A = A I_n = A$.

Démonstration. ...

Remarque 13

- Le produit de deux matrices en général n'est pas défini lorsqu'il n'y a pas, comme on dit,

$$\text{Matrice de taille } p \times q \quad \times \quad \text{Matrice de taille } q \times r \quad = \quad \text{Matrice de taille } p \times r.$$

compatibilité des tailles

- Le produit matriciel n'est pas commutatif – même en cas de compatibilité des formats ! Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- L'exemple précédent montre également qu'un produit de matrices peut être nul sans qu'aucune d'entre elles ne le soit. En particulier, une puissance de matrice non nulle peut être nulle, *e.g.* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_{2,2}$.

Théorème 14 – Produit par blocs (HP)

Soit $A, B, C, D, A', B', C', D'$ des matrices à coefficients dans \mathbb{K} dont les tailles sont indiquées ci-après.

$$\begin{pmatrix} p & \uparrow \quad \uparrow \\ \uparrow \quad \uparrow & A \quad B \\ C \quad D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q & \uparrow \quad \uparrow \\ \uparrow \quad \uparrow & A' \quad B' \\ C' \quad D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

Démonstration. Calculatoire donc omise, mais sans difficulté.

En résumé, tout se passe avec les blocs comme si chacun d'entre eux était un simple coefficient.

Corollaire 15

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Si l'on note C_1, \dots, C_q les colonnes de B , alors, pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$, la k^{e} colonne de AB est égale à AC_k , soit l'écriture par blocs

$$AB = A(C_1 \cdots C_q) = (AC_1 \cdots AC_q).$$

1.2.3 Transposition**Définition 16 – Transposée**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *transposée de A* , notée A^\top , la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (A^\top)_{i,j} = A_{j,i}.$$

Autrement dit,

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ alors } A^\top = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

La transposée de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est ainsi une matrice à p lignes et n colonnes et le coefficient a_{ij} de A devient le coefficient en j^{e} ligne et en i^{e} colonne de A^\top .

Exemple 17 • $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

- La transposée d'une matrice ligne est une matrice colonne, et inversement : $(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Théorème 18 – Propriétés de la transposition

(i) Linéarité. Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$.

(ii) Involutivité. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$.

En particulier $A \mapsto A^\top$ est une bijection de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

(iii) Produit. Pour tous $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Démonstration. ...

Notation 19 Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $E_i^{(n)}$ (ou plus simplement E_i) la matrice colonne à n lignes dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui en i^{e} ligne égal à 1.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

position i

Théorème 20 – Produits matrice ligne vs matrice colonne

On dispose des deux relations fondamentales suivantes :

(i) $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad E_i^{(n)^\top} E_j^{(n)} = \delta_{i,j}$ (plus simplement, s'il n'y a pas d'ambiguïté, $E_i^\top E_j = \delta_{i,j}$);

(ii) $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, \quad E_i^{(p)} E_j^{(q)^\top} = E_{i,j}^{(p,q)}$ (plus simplement, s'il n'y a pas d'ambiguïté, $E_i E_j^\top = E_{i,j}$).

Démonstration. ...

Exemple 21 – Produit de matrices élémentaires

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, \quad \forall (k, l) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket, \quad E_{i,j}^{(p,q)} E_{k,l}^{(q,r)} = \delta_{j,k} E_{i,l}^{(p,r)}.$$

Corollaire 22 – Produit matriciel et lignes/colonnes/coefficients

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$,

$$AE_j \text{ est la } j^{\text{e}} \text{ colonne de } A, \quad E_i^T A \text{ est la } i^{\text{e}} \text{ ligne de } A \quad \text{et} \quad E_i^T AE_j = A_{i,j}.$$

Plus généralement, si l'on note C_1, \dots, C_q les colonnes de A , alors, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$, $AX = \sum_{j=1}^q x_j C_j$ est une combinaison linéaire des colonnes de A .

Démonstration. ... ■

2 Systèmes linéaires

Ce paragraphe est consacré à la résolution de certaines équations linéaires. Celles-ci interviennent dans de nombreux problèmes d'algèbre linéaire, il est donc important de disposer d'une démarche de résolution systématique, fournie en pratique par l'algorithme du pivot de Gauss.

2.1 Position du problème

Définition 23 – Système linéaire

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle *système linéaire de n équations à p inconnues* x_1, \dots, x_p dans \mathbb{K} tout système d'équations (\mathcal{S}) de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,j} x_j + \dots + a_{1,p} x_p = b_1 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{i,1} x_1 + \dots + a_{i,j} x_j + \dots + a_{i,p} x_p = b_i \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{n,1} x_1 + \dots + a_{n,j} x_j + \dots + a_{n,p} x_p = b_n, \end{array} \right. \quad (\mathcal{S})$$

où $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une famille d'éléments de \mathbb{K} et (b_1, \dots, b_n) un n -uplet d'éléments de \mathbb{K} .

- Les éléments de la famille $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ sont appelés les *coefficients du système* et la matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est appelée la *matrice des coefficients du système*.
- Le n -uplet (b_1, \dots, b_n) est appelé le *second membre* du système et, lorsque ce n -uplet est nul, le système est dit *homogène*.
- On appelle *solution du système* tout p -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant les n équations de (\mathcal{S}) .
- Le système (\mathcal{S}) est dit *compatible* lorsqu'il admet au moins une solution et *incompatible* sinon.
- Le système (\mathcal{S}_0) obtenu en remplaçant tous les b_i par 0 est appelé le *système homogène associé* à (\mathcal{S}) .

Exemple 24 Le système de trois équations à trois inconnues

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_3 - x_1 = 1 \end{array} \right.$$

est incompatible puisque, si (x_1, x_2, x_3) était une solution, en sommant les trois équations on obtiendrait $0 = 3$. Le système homogène associé

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_1 = 0 \end{array} \right.$$

admet pour solutions tous les triplets de la forme $(\lambda, \lambda, \lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Remarque 25 Tout système homogène est compatible puisqu'il admet au moins la solution nulle $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^p$.

Exemple 26 Les systèmes suivants ne sont pas des systèmes linéaires :

$$\begin{cases} x - y^2 = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2xy = -3. \end{cases}$$

En effet, dans le premier système l'inconnue y apparaît avec un exposant distinct de 1 et dans le second une des équations contient un produit des inconnues.

Écriture matricielle d'un système linéaire. Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est la matrice du système (\mathcal{S}) , alors, en posant $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p)^\top \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $B = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système (\mathcal{S}) équivaut à l'équation matricielle $AX = B$. Par ailleurs, le système homogène associé (\mathcal{S}_0) équivaut à $AX = 0$. En pratique, on s'autorisera à confondre le système (\mathcal{S}) avec l'équation matricielle $AX = B$ qui lui est associée.

Exemple 27 Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a l'équivalence

$$\begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les systèmes linéaires étant un type particulier d'équations linéaires, leurs solutions possèdent des propriétés similaires à celles énoncées pour les équations différentielles linéaires au chapitre 8.

Théorème 28 – Propriétés des solutions d'un système linéaire

- **Structure de l'ensemble des solutions.** Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_{part} + X_0$, où X_{part} est une solution particulière et où X_0 parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.
- **Principe de superposition.** Soit $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Si, pour tout $i \in \{1, 2\}$, X_i est une solution de l'équation $AX = B_i$, alors $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ est une solution de l'équation $AX = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$.

Remarque 29 Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B est combinaison linéaire des colonnes de A (conséquence directe du théorème 22).

2.2 Échelonnement d'un système par la méthode du pivot

2.2.1 Matrice/système échelonné réduit

Exemple 30 Le système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_5 = 2 \\ x_3 + 2x_5 = -3 \\ x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

a une infinité de solutions : les inconnues x_2 et x_5 peuvent prendre n'importe quelles valeurs et chacune des valeurs de x_2 et x_5 déterminent un unique triplet (x_1, x_3, x_4) tel que $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ est solution du système. En effet, le système (1) équivaut au système

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 - 3x_5 \\ x_3 = -3 - 2x_5 \\ x_4 = 2x_5. \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions du système (1) est

$$\{(2 - 2x_2 - 3x_5, x_2, -3 - 2x_5, 2x_5, x_5) \mid (x_2, x_5) \in \mathbb{K}^2\}.$$

Les inconnues x_2 et x_5 sont dites *libres* (elles peuvent prendre n'importe quelles valeurs dans \mathbb{K}) et les inconnues x_1 , x_3 et x_4 sont dites *liées* (leurs valeurs sont déterminées par les inconnues libres). Observons au passage que nous effectuons ici un choix, dans la mesure où l'on aurait aussi pu retenir x_1 et x_5 pour les inconnues libres et x_2 , x_3 et x_4 pour les inconnues liées. Toutefois, pour ces deux choix, un invariant subsiste : il y a le même nombre d'inconnues libres (en l'occurrence 2) et d'inconnues liées (en l'occurrence 3).

La résolution du système (1) est simplissime du fait de sa forme dite échelonnée réduite : les inconnues liées sont isolées, au sens où elles apparaissent dans une seule équation. L'idée principale de l'algorithme du pivot de Gauss est, partant d'un système quelconque, de se ramener, par des combinaisons de lignes, à un système échelonné réduit équivalent, *i.e.* un système où l'inconnue de plus petit indice apparaissant dans une ligne n'apparaît pas dans les autres lignes. Précisément, on s'appuie sur les définitions suivantes.

Définition 31 – Matrice/système échelonné (réduit), pivot (HP) –

- La matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite *échelonnée* lorsqu'il existe un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et une suite strictement croissante $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ d'éléments de $\llbracket 1, p \rrbracket$ tels que

$$\text{(i)} \quad \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad a_{i,j_i} \neq 0;$$

$$\text{(ii)} \quad \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 1, j_i - 1 \rrbracket, \quad a_{i,j} = 0;$$

$$\text{(iii)} \quad \forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad a_{i,j} = 0.$$

Autrement dit, les lignes nulles sont regroupées au bas de la matrice (lignes $k+1$ à n) et les autres lignes sont classées suivant la position de leur premier élément non nul, ces positions étant deux à deux distinctes.

Une matrice échelonnée correspond donc la représentation schématique ci-contre, où chaque ligne non nulle commence par d'avantage de 0 que la précédente.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,j_1} & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{2,j_2} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & & & & & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{k,j_k} & \bullet & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(où les coefficients \bullet sont quelconques)

- Un système linéaire $AX = B$ est dit *échelonné* lorsque la matrice A de ses coefficients l'est.
- On appelle *pivots* d'un système échelonné les coefficients a_{i,j_i} qui apparaissent en tête des lignes non nulles.
- Une matrice est dite *échelonnée réduite* lorsqu'elle est échelonnée, lorsque ses pivots sont tous égaux à 1 et lorsque les coefficients situés au-dessus des pivots sont nuls, *i.e.* vérifiant en complément des conditions **(i)** à **(iii)** les conditions additionnelles

$$\text{(iv)} \quad \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad a_{i,j_i} = 1;$$

$$\text{(v)} \quad \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad \forall l \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket, \quad a_{l,j_i} = 0.$$

- Un système linéaire $AX = B$ est dit *échelonné réduit* lorsque la matrice A de ses coefficients l'est.

Exemple 32 Le système (1) de l'exemple 30 est échelonné réduit.

2.2.2 Méthode du pivot de Gauss

Comme annoncé en introduction, pour résoudre le système $AX = B$ nous allons nous ramener, à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, à un système échelonné réduit équivalent.

Définition-théorème 33 – Opérations élémentaires sur les lignes –

Soit $i, j \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On appelle *opérations élémentaires* (*sur les lignes d'une matrice/d'un système linéaire*) les opérations suivantes :

- permutation des $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes, notée $L_i \leftrightarrow L_j$;
- multiplication de la $i^{\text{ème}}$ ligne par $\alpha \neq 0$, notée $L_i \leftarrow \alpha L_i$;
- addition de la $j^{\text{ème}}$ ligne multipliée par α à la $i^{\text{ème}}$ ligne (avec $i \neq j$), notée $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

Propriété fondamentale. Transformer un système linéaire donné par des opérations élémentaires **SUR LES LIGNES** fournit un système équivalent et ne modifie donc pas l'ensemble des solutions.

Démonstration. Les opérations élémentaires fournissent des équivalences dans la mesure où ces transformations sont réversibles. En effet, l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ se défait elle-même, l'opération $L_i \leftarrow \alpha L_i$ se défait par $L_i \leftarrow \frac{1}{\alpha} L_i$ et l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ se défait par $L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j$. ■

Remarque 34

- L'itération de l'opération de permutation de deux lignes autorise les permutations quelconques des lignes d'une matrice/d'un système.
- La combinaison des deux règles $L_i \leftarrow \alpha L_i$, avec $\alpha \neq 0$, et $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$, avec $i \neq j$, autorise la règle commode suivante :

$$L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j, \quad \text{avec } \alpha \neq 0 \text{ et } i \neq j.$$

L'algorithme suivant permet de transformer un système quelconque en un système échelonné réduit. Il ne s'agit pas forcément de la méthode de résolution la plus astucieuse pour un système donné, mais d'une méthode systématique et générale. Cet algorithme comporte deux phases : une phase d'échelonnement (mise sous forme échelonnée du système) suivie d'une phase de réduction (mise sous forme échelonnée réduite du système).

En pratique Algorithme du pivot de Gauss ou élimination de Gauss-Jordan[†]

La première phase de l'algorithme est celle de l'échelonnement, qui va faire apparaître les pivots.

1. On cherche la première colonne non nulle du système.
2. Dans cette colonne, on effectue un choix de pivot. A priori, n'importe quel coefficient non nul de la colonne convient, toutefois, si les calculs sont effectués manuellement, on a intérêt à privilégier un pivot minimisant ces derniers. On dispose de trois critères pour cela :
 - le pivot lui-même doit être facile à inverser (l'idéal est un pivot égal à 1) ;
 - les autres coefficients de la ligne du pivot doivent être « simples », de préférence des entiers ;
 - plus il y a de zéros sur la ligne contenant le pivot, moins il y aura de calculs !
3. On réalise un échange de lignes pour ramener le pivot choisi sur la première ligne.
4. On annule tous les coefficients situés sous le pivot à l'aide d'opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ou, pour éviter l'intrusion de fractions, $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$, avec $\alpha \neq 0$. Cette étape d'élimination permet de faire disparaître l'inconnue liée au pivot des équations situées en-dessous.
5. Si des lignes nulles (équation « $0 = 0$ ») apparaissent lors de l'étape précédente, on les supprime sans ménagement.
6. On recommence récursivement les étapes précédentes en considérant le sous-système situé strictement en-dessous à droite du pivot.

À l'issue de cette première phase, le système est échelonné. Suit alors la seconde phase, dite « phase de remontée », qui vise à faire apparaître des 0 au-dessus des pivots.

7. On cherche le dernier pivot du système (celui situé le plus à droite).
8. On annule tous les coefficients situés au-dessus du pivot à l'aide d'opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ou, pour éviter l'intrusion de fractions, $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$, avec $\alpha \neq 0$.
9. On recommence récursivement les deux étapes précédentes en considérant le sous-système situé strictement au-dessus du pivot.
10. Via des opérations élémentaires $L_i \leftarrow \alpha L_i$, on normalise tous les pivots à 1.

À l'issue de cette seconde phase, le système est échelonné réduit.

Exemple 35 Les solutions du système linéaire $\begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ sont tous les quadruplets $(3 - 2\lambda, 0, -1 + \lambda, \lambda)$, avec λ décrivant \mathbb{R} .

En effet, en colorant les pivots successifs,

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \textcolor{red}{x} - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \textcolor{red}{x} - y + z + t = 2 \\ \textcolor{red}{y} + z - t = -1 \\ -y + 2z - 2t = -2 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
 &\iff \begin{cases} \textcolor{red}{x} - y + z + t = 2 \\ \textcolor{red}{y} + z - t = -1 \\ \textcolor{red}{z} - t = -1 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
 &\iff \begin{cases} \textcolor{red}{x} - y + 2t = 3 \\ \textcolor{red}{y} = 0 \\ \textcolor{red}{z} - t = -1 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\
 &\iff \begin{cases} \textcolor{red}{x} + 2t = 3 \\ \textcolor{red}{y} = 0 \\ \textcolor{red}{z} - t = -1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
 &\iff \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 0 \\ z = -1 + t \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2
 \end{aligned}$$

Finalement l'inconnue t est libre et les inconnues x, y et z sont liées.

†. Johann Carl Friedrich Gauss (1777 à Brunswick – 1855 à Göttingen) est un mathématicien, astronome et physicien allemand, dont la contribution aux mathématiques est extraordinaire.

Marie Ennemond Camille Jordan (1838 à Lyon – 1922 à Paris) est un mathématicien français, professeur au Collège de France et membre de l'Académie des Sciences, connu notamment pour son travail fondamental dans la théorie des groupes.

Remarque 36 Observons sur cet exemple qu'il n'y a pas unicité quant à l'écriture de l'ensemble des solutions d'un système admettant une infinité de solutions. En effet :

$$\{(3 - 2\lambda, 0, -1 + \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \underset{\mu=\lambda-1}{=} \{(1 - 2\mu, 0, \mu, \mu + 1) \mid \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Dans le premier cas, les trois premières inconnues sont exprimées en fonction de la dernière, alors que dans la seconde écriture c'est la troisième inconnue qui est utilisée pour exprimer les valeurs des autres. On aurait aussi pu choisir la première, mais pas la deuxième naturellement !

Le seul invariant est le nombre de paramètres nécessaires à la description des solutions, en l'occurrence ici un.

Exemple 37 Les solutions du système linéaire $\begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \\ x + y + z + 2t = 2 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ sont tous les quadruplets $(3 - \lambda - \mu, -1 - \mu, \lambda, \mu)$, avec (λ, μ) décrivant \mathbb{R}^2 .

En effet,

$$\begin{array}{lcl} \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \\ x + y + z + 2t = 2 \end{cases} & \iff & \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ y + t = -1 \\ y + t = -1 \\ y + t = -1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ & \iff & \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ y + t = -1 \\ y + t = -1 \\ y + t = -1 \end{cases} \quad L_4 \leftarrow L_1 - L_4 \\ & \iff & \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ y + t = -1 \\ y + t = -1 \\ y + t = -1 \end{cases} \\ & \iff & \begin{cases} x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ & \iff & \begin{cases} x = 3 - z - t \\ y = -1 - t \end{cases} \end{array}$$

Exemple 38 Le système linéaire $\begin{cases} 3y + 2z + t = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ x - y + 2z - t = 3 \\ 5x + y + 9z - 3t = 4 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ est incompatible.

En effet,

$$\begin{array}{lcl} \begin{cases} 3y + 2z + t = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ x - y + 2z - t = 3 \\ 5x + y + 9z - 3t = 4 \end{cases} & \iff & \begin{cases} x - y + 2z - t = 3 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ 3y + 2z + t = 1 \\ 5x + y + 9z - 3t = 4 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\ & \iff & \begin{cases} x - y + 2z - t = 3 \\ 6y + 2z + 2t = -4 \\ 3y + 2z + t = 1 \\ 6y - z + 2t = -11 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & \iff & \begin{cases} x - y + 2z - t = 3 \\ 6y + 2z + 2t = -4 \\ 2z = 6 \\ -3z = -7 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \\ & \iff & \begin{cases} x - y + 2z - t = 3 \\ 6y + 2z + 2t = -4 \\ 2z = 6 \\ 0 = 4 \end{cases} \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \\ & \iff & \begin{cases} x - y + 2z - t = 3 \\ 6y + 2z + 2t = -4 \\ 2z = 6 \\ 0 = 4 \end{cases} \quad L_4 \leftarrow 2L_4 + 3L_3 \end{array}$$

Exemple 39 Le système linéaire $\begin{cases} 3x + 6y = -3 \\ -2x + y = 12 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ admet une unique solution $(-5, 2)$.

En effet,

$$\begin{cases} 3x + 6y = -3 \\ -2x + y = 12 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow -3L_2 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} 3x + 6y = -3 \\ 15y = 30 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 6L_2}{\iff} \begin{cases} 3x = -15 \\ y = 2 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1}{\iff} \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$$

2.2.3 Solutions d'un système échelonné réduit

Définition 40 – Inconnue libre/liée

Dans un système échelonné (réduit), les inconnues qui correspondent aux colonnes où il n'y a pas de pivots sont dites *libres*. Les autres sont dites *liées*.

Les exemples précédents suggèrent l'alternative suivante concernant l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

 **En pratique**  **Solutions d'un système échelonné réduit.** Les solutions d'un système échelonné réduit se trouvent de manière immédiate. Précisément :

- si le système comporte une ligne du type $0 = b$ avec $b \neq 0$, alors il est incompatible ; en dehors de ce cas
- si le système ne possède pas de variable libre, alors il possède une unique solution, qui s'obtient immédiatement ;
- si le système a une ou plusieurs variables libres, alors il possède une infinité de solutions. Les variables libres peuvent prendre n'importe quelles valeurs dans \mathbb{K} et les variables liées s'expriment en fonction des variables libres.

2.3 Interprétation géométrique pour un système à deux ou trois inconnues réelles

Dans un plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , toute droite possède une équation (dite *cartésienne*) de la forme

$$ax + by + c = 0, \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } (a, b) \neq (0, 0).$$

Dans ce contexte géométrique, l'ensemble des solutions d'un système linéaire

$$\begin{cases} a x + b y = c \\ a' x + b' y = c', \end{cases}$$

avec $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$, correspond à l'intersection de deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' , soit l'alternative suivante annoncée au paragraphe précédent :

- une droite, si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont confondues, auquel cas le système a une infinité de solutions ;
- l'ensemble vide, si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles sans être confondues, auquel cas le système est incompatible ;
- un point, si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont sécantes, auquel cas le système a une unique solution.

Exemple 41 L'exemple 39 montre que l'intersection des deux droites d'équations cartésiennes $3x + 6y = -3$ et $-2x + y = 12$ est le point $(-5, 2)$.

De la même façon, dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tout plan possède une équation (dite *cartésienne*) de la forme

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

et, dans ce contexte géométrique, l'ensemble des solutions d'un système linéaire à trois inconnues réelles s'interprète du point de vue de l'intersection de plans.

Exemple 42 L'intersection des deux plans d'équations cartésiennes $x + 2y + z = 5$ et $3x + y - 2z = 0$ est la droite passant par le point $(-1, 3, 0)$ et dirigé par le vecteur $(1, -1, 1)$.

En effet,

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ -y - z = -3 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{5}(L_2 - 3L_1) \\ \iff \begin{cases} x - z = -1 \\ y + z = 3 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

et l'ensemble des solutions de ce système est $\{(-1 + \lambda, 3 - \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = (-1, 3, 0) + (1, -1, 1)\mathbb{R}$.

3 Anneau des matrices carrées

3.1 Définitions et exemples

Définition-théorème 43 – Anneau des matrices carrées

Une matrice est dite *carrée* lorsqu'elle a le même nombre de lignes et de colonnes. On note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans \mathbb{K} et 0_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

Le triplet $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, non commutatif et non intègre dès que $n \geq 2$.

Démonstration. Le théorème 7 permet d'affirmer que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien et la structure d'anneau résulte alors du théorème 12. Inspirons-nous enfin de la remarque 13 et considérons, pour tout $n \geq 2$, les matrices par blocs suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0_{n-2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0_{n-2} \end{pmatrix}, \quad \text{pour lesquelles} \quad AB = 0_n \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Exemple 44 La matrice nulle 0_n et la matrice identité I_n commutent avec toutes les matrices carrées de taille n :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad AI_n = I_n A = A \quad \text{et} \quad 0_n A = A 0_n = 0_n.$$

Plus généralement, l'exemple suivant précise quelles sont les matrices qui commutent avec tout le monde.

Exemple 45 – Centre de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Le *commutant de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$* , i.e. l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est formé des matrices λI_n , avec $\lambda \in \mathbb{K}$, soit

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad AM = MA\} = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K} I_n.$$

3.2 Éléments remarquables parmi les matrices carrées

Définition 46 – Matrices carrées remarquables

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite

- *diagonale* lorsque tous ses coefficients non diagonaux sont nuls, i.e. vérifie l'assertion

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad i \neq j \implies a_{ij} = 0.$$

En particulier, les matrices diagonales λI_n , où $\lambda \in \mathbb{K}$, sont appelées *matrices scalaires*.

- *triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) lorsque ses coefficients situés strictement au-dessous (resp. au-dessus) de sa diagonale sont nuls, i.e. vérifie l'assertion

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad i > j \implies a_{ij} = 0 \quad \text{(resp.} \quad i < j \implies a_{ij} = 0\text{)}.$$

Matrice triangulaire supérieure	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$	Matrice triangulaire inférieure
---------------------------------	---	---------------------------------

- *symétrique* (resp. *antisymétrique*) lorsque $A^\top = A$ (resp. $A^\top = -A$), i.e. vérifie l'assertion

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_{ji} = a_{ij} \quad \text{(resp.} \quad a_{ji} = -a_{ij}\text{)}.$$

On note respectivement ces ensembles de matrices $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} I_n$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 47 $\begin{pmatrix} 3i & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & -i & 6 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ est symétrique et $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarque 48

- La diagonale d'une matrice antisymétrique est nulle, chaque coefficient devant être égal à son opposé.
- La transposition induit une bijection de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.
- Les matrices diagonales sont exactement les matrices à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures, autrement dit $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

On vérifie sans difficulté que, pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

- **Combinaison linéaire :** $\lambda \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha_{nn} & \\ & & & \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \beta_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \beta_{nn} & \\ & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} + \mu\beta_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda\alpha_{nn} + \mu\beta_{nn} & \\ & & & \end{pmatrix}$.
- **Produit :** $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha_{nn} & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \beta_{nn} & \\ & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha_{nn}\beta_{nn} & \\ & & & \end{pmatrix}$ donc, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha_{nn} & \\ & & & \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^k & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha_{nn}^k & \\ & & & \end{pmatrix}$.

En particulier, l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales est stable par combinaisons linéaires et par produits ; résultats qui se généralisent aux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) comme l'énonce le théorème suivant.

Théorème 49 – Sous-anneaux des matrices triangulaires/diagonales

Les ensembles $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont stables par combinaisons linéaires et par produits. En particulier, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-anneaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, commutatif dans le cas de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. ... ■

Remarque 50 La diagonale du produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) s'obtient en effectuant le produit coefficient à coefficient de leurs coefficients diagonaux respectifs.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ & \ddots & * \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & * & * \\ & \ddots & * \\ & & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & * & * \\ & \ddots & * \\ & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}.$$

3.3 Puissances d'une matrice carrée et éléments nilpotents

La structure d'anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ permet de considérer les puissances d'une matrice carrée A et on dispose alors des règles de calcul classiques valables dans un anneau (théorèmes 18 et 59 du chapitre 11).

Théorème 51

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, $A^p A^q = A^q A^p = A^{p+q}$ et $(A^p)^q = (A^q)^p = A^{pq}$.

(ii) Si A et B COMMUTENT, alors, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$,

• $(AB)^p = A^p B^p = B^p A^p$ et $A^p B^q = B^q A^p$; • **Formule du binôme.** $(A+B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$;

• **Identité de Bernoulli.** $A^p - B^p = (A - B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-k-1}$.

Exemple 52 Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{[n]}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$J^p = n^{p-1} J \quad \text{et} \quad K^p = (-1)^p I_n + \frac{(n-1)^p - (-1)^p}{n} (K + I_n).$$

Définition 53 – Matrice nilpotente, indice de nilpotence

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *nilpotente* lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_n$. Le cas échéant, l'entier $\min\{k \in \mathbb{N}^* \mid A^k = 0_n\}$ est appelé l'*indice de nilpotence de A* .

Exemple 54 Pour tous $a, b, c \in \mathbb{K}$, les matrices triangulaires strictes $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ & 0 & c \\ & & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & & \\ c & 0 & \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes.

Ce résultat se généralise aux matrices triangulaires strictes de taille quelconque (cf. exercice 17).

Exemple 55 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & k(k-1)/2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

☞ **En pratique** ☞ Via la formule du binôme, on peut calculer les puissances de toute matrice se décomposant sous la forme $\lambda I_n + N$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et N une matrice nilpotente.

3.4 Trace d'une matrice carrée

Définition-théorème 56 – Trace d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *trace de A* , notée $\text{tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux de A , i.e. $\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n A_{k,k}$. En particulier, $\text{tr}(A) \in \mathbb{K}$.

(i) Linéarité. Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)$.

(ii) Invariance par permutation circulaire des facteurs. Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Démonstration. ...

Exemple 57 • $\text{tr} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = 2 - 5 = -3$. • La trace d'une matrice antisymétrique est nulle.

Remarque 58

- Il ne faut pas se méprendre sur le sens du point **(ii)** du théorème précédent pour un produit de plus de deux facteurs. Par exemple, si $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB) = \text{tr}(BCA) \quad \text{mais en général} \quad \text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(ACB).$$

- Le point **(ii)** du théorème précédent se généralise de la façon suivante :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

Exemple 59 – Forme coordonnée Pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{tr}(AE_{i,j}) = A_{j,i}$.

4 Éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

4.1 Le groupe $\text{GL}_n(\mathbb{K})$

Le groupe des éléments inversibles d'un anneau a été introduit à la définition 64 du chapitre 11.

Définition-théorème 60 – Matrice inversible, groupe linéaire

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *inversible* lorsqu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$, i.e. lorsqu'elle est un élément inversible de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$. Le cas échéant, cet inverse est unique et noté classiquement A^{-1} . Le groupe des inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ (*groupe linéaire de degré n sur \mathbb{K}*).

En pratique, on pourra utiliser le résultat non trivial suivant (démontré au chapitre 23) pour établir qu'une matrice est inversible.

Théorème 61

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Ainsi, si $AB = I_n$, on a alors automatiquement $BA = I_n$, ce qui n'avait rien d'évident a priori. Notamment A commute avec son inverse A^{-1} .

Reste à savoir qui sont concrètement les matrices inversibles ? et comment calcule-t-on l'inverse d'une matrice inversible ?

Exemple 62

1. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ comme on le vérifie aisément. S'il existe une formule générale de calcul de l'inverse, on ne peut pas dire qu'elle saute aux yeux... (cf. exemple 69).

2. Toute matrice carrée qui possède une ligne ou une colonne nulle N'est PAS inversible.

En effet, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et supposons par exemple que A possède une colonne nulle, disons la j^{e} . Alors, pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le produit BA possède lui aussi une j^{e} colonne nulle (corollaire 15) et ainsi ne saurait être égal à I_n .

3. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. La matrice diagonale $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha_n & \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si tous les α_i sont non nuls et, le cas échéant, $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha_n & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha_n^{-1} & \end{pmatrix}$.

4. En particulier, la matrice scalaire λI_n est inversible si et seulement si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, d'inverse $\lambda^{-1} I_n$.

Opérations sur les matrices inversibles

Pour une matrice A inversible, la notion de k^{e} itéré vaut pour un exposant entier relatif k quelconque avec $A^k = (A^{-1})^{-k}$, pour $k \leq 0$. Les propriétés générales des éléments inversibles sont bien sûr valables dans ce contexte particulier (théorème 15 du chapitre 11).

Théorème 63 – Opérations sur les matrices inversibles

Soit $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, i.e. deux matrices inversibles.

- (i) **Inversibilité de l'inverse.** A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- (ii) **Inversibilité du produit.** AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- (iii) **Inversibilité d'une puissance.** Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
- (iv) **Inversibilité de la transposée.** A^{\top} est inversible et $(A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}$.

Démonstration. Le point (iv) découle simplement de $A^{\top}(A^{-1})^{\top} = (A^{-1}A)^{\top} = I_n^{\top} = I_n$. ■

✖ **ATTENTION !** ✖ Dans l'assertion (ii), si A et B ne commutent pas, l'égalité $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ est FAUSSE.

Remarque 64 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si une puissance de A est non inversible, alors A est non inversible (contraposée du point (iii) du théorème précédent). En particulier, les matrices nilpotentes ne sont pas inversibles.

4.2 Matrices inversibles de taille 2

Pour les matrices carrées de taille 2, on peut proposer un critère simple d'inversibilité ainsi qu'une formule pour le calcul de l'inverse le cas échéant (résultats qui seront généralisés au chapitre 29 pour les matrices carrées de taille n quelconque).

Définition-théorème 65 – Déterminant, inversibilité et inverse d'une matrice carrée de taille 2

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{K}$.

- On appelle *déterminant de la matrice* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, noté $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, le scalaire $ad - bc$.
 - La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul et, le cas échéant :
- $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Un simple calcul donne : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad - bc)I_2$.

• Si $ad - bc \neq 0$, alors par définition de l'inversibilité, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

• Pour la réciproque, supposons par l'absurde que $ad - bd = 0$ ET que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, auquel cas :

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \times \underbrace{(ad - bc)}_{=0} I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi $a = b = c = d = 0$. Il en découle que la matrice de départ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est nulle et donc non inversible, d'où une contradiction. ■

En lien avec cette notion de déterminant, on peut utiliser directement les formules suivantes pour la résolution des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

Théorème 66 – Formules de Cramer pour les systèmes 2×2

Soit $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{K}$. Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, alors le système linéaire $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ admet une unique solution donnée par les relations suivantes, dites *formule de Cramer*,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}.$$

En pratique Au dénominateur, qu'il s'agisse de x ou de y , on trouve toujours le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ de la matrice des coefficients du système. Au numérateur pour la PREMIÈRE inconnue x , on trouve aussi ce déterminant, mais dans lequel on a remplacé la PREMIÈRE colonne par le second membre $\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$. Pour la DEUXIÈME inconnue y , même principe en remplaçant cette fois la DEUXIÈME colonne du déterminant.

Démonstration. Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ est inversible. Le système admet donc une unique solution donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{ab' - a'b} \begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{ab' - a'b} \begin{pmatrix} cb' - c'b \\ ac' - a'c \end{pmatrix}.$$

Exemple 67 Le système $\begin{cases} 3x + 6y = -3 \\ -2x + y = 12 \end{cases}$ est de Cramer et son unique solution est $(-5, 2)$.

En effet, le déterminant du système est $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - (-2) \times 6 = 15 \neq 0$ et, d'après les formules de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 12 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-75}{15} = -5 \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{30}{15} = 2.$$

4.3 Lien avec les systèmes linéaires

Vous avez appris au collège à résoudre l'équation du premier degré $ax = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Précisément,

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid ax = b\} = \begin{cases} \{b/a\} & \text{si } a \neq 0 \\ \mathbb{R} & \text{si } a = b = 0 \\ \emptyset & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0. \end{cases}$$

En résumé, pour cette équation, la question principale est « Peut-on diviser par a ? ». Or, nous avons vu à la section 2.1 que tout système linéaire peut s'écrire sous une forme matricielle équivalente $AX=B$. Une généralisation de la résolution précédente revient alors à se poser à nouveau la question de pouvoir « diviser par A », autrement dit de l'inversibilité de A . Et effectivement ce lien entre inversibilité et nombre de solutions persiste comme l'indique la proposition suivante.

Définition-théorème 68 – Matrice inversible et système de Cramer

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) pour tout second membre $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système linéaire $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, possède une et une seule solution ;
- (ii) la matrice A des coefficients du système est inversible.

On appelle *système de Cramer*[†] tout système linéaire de n équations à n inconnues vérifiant l'une des (donc les deux !) propriétés précédentes.

Pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'unique solution du système de Cramer $AX = B$ est $A^{-1}B$.

Démonstration. Lorsque A est inversible, l'équivalence « $AX = Y \iff X = A^{-1}Y$ » est claire (il suffit de multiplier à gauche par A^{-1} ou A) et l'implication (ii) \implies (i) en découle.

Réiproquement, faisons l'hypothèse que, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système linéaire $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ possède une et une seule solution.

- Notons Y_1, \dots, Y_n les colonnes de I_n . Par hypothèse, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le système $AX = Y_i$ possède une unique solution B_i . En notant B la matrice carrée de colonne B_1, \dots, B_n , on a alors $AB = I_n$ (cf. corollaire 15).
- Montrons que l'on a également $BA = I_n$ (sans recourir au théorème 61). On a déjà

$$A(BA - I_n) = (AB)A - A = I_nA - A = 0,$$

ainsi, en lisant cette égalité colonne par colonne, les colonnes de $BA - I_n$ sont toutes solutions du système homogène $AX = 0$. Or ce système possède une unique solution par hypothèse et 0 est justement solution. Toutes les colonnes de $BA - I_n$ sont donc nulles, i.e. $BA - I_n = 0$, soit $BA = I_n$.

Par conséquent, A est inversible. ■

 **En pratique**  **Inversibilité et inversion d'une matrice par résolution d'un système linéaire.**

Pour décider si une matrice carrée est inversible ou non et, le cas échéant, calculer son inverse, on peut chercher à résoudre, pour tout second membre $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. En vertu du théorème précédent, A est inversible si et seulement si ce système admet une unique solution et l'expression de cette dernière en fonction de Y donne l'expression de A^{-1} .

Exemple 69 La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

En effet, pour tous $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = a \\ x + y + 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = b & L_1 \leftrightarrow L_2 \quad (\text{pivot simple égal à 1}) \\ 2x + 3y + z = a \\ x + y + z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + 2z = b \\ y - 3z = a - 2b & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ z = b - c & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = -b + 2c & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ y = a + b - 3c & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ z = b - c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -a - 2b + 5c & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ y = a + b - 3c \\ z = b - c \end{cases}$$

Le système admet effectivement une unique solution pour tout second membre (a, b, c) , ainsi A est inversible et les coefficients de l'inverse A^{-1} sont ceux des paramètres a, b, c du second membre.

[†]. Gabriel Cramer (1704 à Genève – 1752 à Bagnols-sur-Cèze) est un mathématicien genevois.

Exemple 70 La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

En effet, pour tout $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - z = a \\ x + 2y + z = b \\ -x + 4y + 5z = c \end{cases} &\iff \begin{cases} x - z = a \\ 2y + 2z = -a + b \\ 4y + 4z = a + c \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\iff \begin{cases} x - z = a \\ 2y + 2z = -a + b \\ 0 = 3a - 2b + c \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{aligned}$$

Pour $a = 1$ et $b = c = 0$, le système obtenu n'a pas de solution du fait de sa troisième ligne $(0 = 3)$, ainsi la matrice A ne saurait être inversible.

4.4 Opérations élémentaires et inversibilité

À l'instar des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice (définition 33), on peut effectuer des opérations analogues sur les colonnes, notées alors : $C_i \leftrightarrow C_j$, $C_i \leftarrow \alpha C_i$ et $C_i \leftarrow C_i + \beta C_j$.

Exemple 71 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Notons P la matrice ci-contre obtenue par application de l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ à I_n . Précisément, $P = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$. Cette matrice est inversible d'inverse elle-même.

Un simple calcul montre alors que le produit PA n'est autre que la matrice A à laquelle on a fait subir l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$.

À présent, si l'on choisit i et j dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ et non plus $\llbracket 1, n \rrbracket$ et si l'on note P la matrice ci-contre obtenue par application de l'opération élémentaire $C_i \leftrightarrow C_j$ à I_p , un simple calcul montre cette fois que le produit AP n'est autre que la matrice A à laquelle on a fait subir l'opération élémentaire $C_i \leftrightarrow C_j$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & 1 \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 72 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$. Notons P la matrice ci-contre obtenue par application de l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \alpha L_i$ à I_n . Précisément, $P = I_n + (\alpha - 1)E_{i,i}$. Cette matrice est inversible, car diagonale à coefficients diagonaux non nuls.

Un simple calcul montre alors que le produit PA n'est autre que la matrice A à laquelle on a fait subir l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \alpha L_i$.

À présent, si l'on choisit i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ et non plus $\llbracket 1, n \rrbracket$ et si l'on note P la matrice ci-contre obtenue par application de l'opération élémentaire $C_i \leftarrow \alpha C_i$ à I_p , un simple calcul montre cette fois que le produit AP n'est autre que la matrice A à laquelle on a fait subir l'opération élémentaire $C_i \leftarrow \alpha C_i$.

Plus généralement, multiplier A à gauche (resp. à droite) par une matrice diagonale de coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (resp. p) revient à multiplier la i^e ligne (resp. colonne) de A par α_i .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & \alpha & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 73 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, avec $i \neq j$, et $\beta \in \mathbb{K}$. Notons P la matrice ci-contre obtenue par application de l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ à I_n . Précisément, $P = I_n + \beta E_{i,j}$. Cette matrice est inversible, d'inverse la « même » matrice dans laquelle on a remplacé β par $-\beta$, i.e. $P^{-1} = I_n - \beta E_{i,j}$.

Un simple calcul montre alors que le produit PA n'est autre que la matrice A à laquelle on a fait subir l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$.

À présent, si l'on choisit i et j dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ et non plus $\llbracket 1, n \rrbracket$ et si l'on note P la matrice ci-contre obtenue par application de l'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + \beta C_j$ à I_p , un simple calcul montre cette fois que le produit AP n'est autre que la matrice A à laquelle on a fait subir l'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + \beta C_j$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & \beta & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

On retiendra essentiellement de ces trois exemples les liens suivants :

Opération élémentaire sur les LIGNES	=	Multiplication à GAUCHE par une matrice inversible
Opération élémentaire sur les COLONNES	=	Multiplication à DROITE par une matrice inversible

Inversibilité et inversion par multiplication par des matrices inverses. Les résultats précédents nous permettent d'envisager une alternative à la résolution d'un système linéaire pour discuter l'inversibilité d'une matrice et calculer son inverse le cas échéant. Fondamentalement, nous allons faire la même chose, mais présentée autrement. Fixons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont nous souhaitons savoir si elle est inversible et, le cas échéant, calculer son inverse.

- Effectuer des opérations élémentaires sur A , on vient de le voir, équivaut à multiplier A par des matrices inverses et, si A est elle-même inversible, le produit obtenu sera encore une matrice inversible. Ainsi, si l'on obtient en cours de calcul une matrice NON inversible, on en déduit automatiquement que A N'était PAS inversible.
- À présent, faisons l'hypothèse que nous avons réussi à transformer A en I_n par des opérations élémentaires P_1, \dots, P_r sur les LIGNES, dans cet ordre. Matriciellement, cela équivaut à : $P_r \dots P_1 A = I_n$ – multiplications à GAUCHE. Ainsi A est inversible et son inverse est $P_r \dots P_1 = P_r \dots P_1 I_n$. Conclusion inattendue : les mêmes opérations élémentaires qui ont transformé A en I_n permettent de transformer I_n en A^{-1} .
- Ci-dessus, on a travaillé EXCLUSIVEMENT SUR LES LIGNES de A . On aurait tout aussi bien pu travailler EXCLUSIVEMENT SUR LES COLONNES de A . La seule condition à respecter est de choisir et de se tenir à ce choix !

Exemple 74 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Sur cet exemple, on va s'attacher à montrer en quoi cette nouvelle méthode d'inversibilité n'est qu'une reformulation de la précédente en termes de systèmes linéaires. Naturellement, sur votre copie, vous choisirez votre méthode préférée. Pour tous $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = a \\ x + 4y + 2z = b \\ x + 3y + 2z = c \end{array} \right. \\
 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \iff \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = a \\ 2y + z = -a + b \\ y + z = -a + c \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \quad \iff \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = a \\ 2y + z = -a + b \\ z = -a - b + 2c \end{array} \right. \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \\
 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \quad \iff \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 2a + b - 2c \\ 2y = 2b - 2c \\ z = -a - b + 2c \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \\
 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \quad \iff \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2a - b \\ y = b - c \\ z = -a - b + 2c \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \end{array}
 \end{array}$$

Transformation de A en I_3 par des opérations élémentaires sur les LIGNES. Transformation de I_3 en A^{-1} par report des mêmes opérations élémentaires qui ont changé A en I_3 .

Exemple 75 La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

En effet, ci-dessous, on montre que, multipliée par des matrices inversibles, A est transformée en une matrice NON inversible, puisque présentant une ligne nulle.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Non inversible}} \quad L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2$$

Remarque 76 – Générateurs du groupes $GL_n(\mathbb{K})$ La stratégie décrite au paragraphe « Inversibilité et inversion par multiplication par des matrices inversibles » établit au passage, en lien avec la terminaison de l'algorithme du pivot de Gauss, que le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices codant les opérations élémentaires introduites aux exemples 71 à 73. Précisément, toute matrice inversible peut s'obtenir comme un produit de matrices de transvection (exemple 73) et de dilatation (exemple 72) – l'opération de permutation $L_i \leftrightarrow L_j$ étant équivalente à une succession de trois transvections ($L_j \leftarrow L_j - L_i$, $L_i \leftarrow L_i + L_j$ et $L_j \leftarrow -L_j + L_i$).

4.5 Matrices triangulaires inversibles

L'étude de l'inversibilité des matrices diagonales est aisée (cf. point 3 de l'exemple 62). Qu'en est-il plus généralement des matrices triangulaires ?

Théorème 77 – Inversibilité et inverse d'une matrice triangulaire

- Une matrice triangulaire A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
- Le cas échéant, A^{-1} est elle aussi triangulaire de même type et ses coefficients diagonaux sont exactement les inverses des coefficients diagonaux de A .

Démonstration. ...

Le théorème précédent établit notamment les égalités

$$U(\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})) = GL_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad U(\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})) = GL_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}),$$

qui ne se sont pas automatiques comme nous l'avions souligné à la remarque 71 du chapitre 11.

Exemple 78 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

En effet, A est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont non nuls. En outre, 1 et -1 sont leur propre inverse.

Un système linéaire est dit *triangulaire* lorsque la matrice des ses coefficients l'est. La reformulation du théorème précédent en termes de système linéaire mène ainsi au corollaire suivant.

Corollaire 79 – Système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls

Un système linéaire triangulaire est de Cramer si et seulement s'il est à coefficients diagonaux non nuls.

Le cas échéant, l'unique solution (x_1, \dots, x_n) peut être déterminée en calculant x_n grâce à la dernière équation, puis en calculant x_{n-1} grâce à l'avant-dernière équation, etc. En supposant avoir calculé $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{i+1}$, la valeur de x_i peut être obtenue à l'aide de la i^{e} équation car le coefficient $a_{i,i}$ est non nul.

Compétences à acquérir

- Maîtriser le produit matriciel : exercices 1 à 3, 12, 15 et 17.
- Maîtriser le calcul par blocs : exercices 2, 19 et 25.
- Calculer les puissances d'une matrice : exercices 19 à 21, 28 et 32.
- Résoudre un système linéaire : exercices 4 à 9.
- Discuter l'inversibilité d'une matrice et calculer l'inverse d'une matrice : exercices 22 à 28 et 30.

Quelques résultats classiques :

- Coefficients et produits des matrices élémentaires (exemples 5 et 21).
- Centre de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (exemple 45).
- Un critère de nilpotence (exemple 54 et exercice 17).
- Centre de $GL_n(\mathbb{K})$ (exercice 35).
- Produit et puissance des matrices de rotations (exercice 32).
- Une construction matricielle du corps \mathbb{C} (exercice 29).