10 Relations binaires

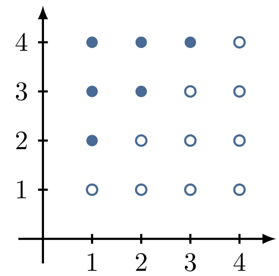
Dans l'intégralité ce chapitre, E désigne un ensemble non vide quelconque.

1 Relations binaires sur un ensemble

Les relations sont partout – dans le monde mathématique et dans notre vie quotidienne. Nous en avons déjà étudié un certain type au chapitre 3 avec la notion d'application. Les assertions suivantes, pourtant diverses, sont toutes l'affirmation d'un lien entre deux objets : « $3 \leqslant 5$ », « 4 divise 12 », « Mathilde est plus âgée que Paul », etc.

Se pose alors la question de définir correctement la notion de relation en mathématiques. Par exemple, quel objet la relation $<$ est-elle sur l'ensemble $[\![1\,,4]\!]$? On peut remarquer que celle-ci est totalement déterminée par les relations :

$$1<2, \quad 1<3, \quad 1<4, \quad 2<3, \quad 2<4 \quad \text{et} \quad 3<4.$$



Formellement, nous pouvons DÉFINIR la relation $<$ sur $[\![1\,,4]\!]$ comme le sous-ensemble

$$\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

de $[\![1\,,4]\!]^2$. En effet, cette partie de $[\![1\,,4]\!]^2$ détermine entièrement la relation $<$. Selon ce point de vue, la relation $\leqslant$ sur $[\![1\,,4]\!]$ est l'ensemble

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}.$$

Ces remarques préliminaires conduisent à la définition suivante.

Définition 1 – Relation binaire

On appelle *relation binaire sur E* toute partie de $E\times E$. Si $\mathcal{R}$ est une telle relation, la proposition « $(x,y)\in\mathcal{R}$ » sera notée préférablement « $x\mathcal{R}y$ », pour tous $x,y\in E$, et lue « x est en relation avec y par $\mathcal{R}$ ».

✖ **ATTENTION !** ✖ Puisque le couple (x,y) n'est pas le couple (y,x), la relation $x\mathcal{R}y$ peut être vraie sans que la relation $y\mathcal{R}x$ le soit.

En pratique, étant donné un ensemble, il est plus fréquent de donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments de cet ensemble soient en relation plutôt que de fournir explicitement la partie de $E\times E$ correspondante.

Exemple 2 Vous connaissez et utilisez déjà certaines relations binaires :

- La relation d'égalité sur E ;
- Les relations $\leqslant$ et $<$ sur $\mathbb{R}$;
- La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$;
- La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, définie pour toutes fonctions $f,g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ par : $\quad f\leqslant g \iff \forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)\leqslant g(x)$;
- La relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{Z}$, définie par : $\quad m\mid n \iff \exists k\in\mathbb{Z},\quad n=km$;
- La relation de congruence modulo α sur $\mathbb{R}$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$, définie par : $\quad x\equiv y\,[\alpha] \iff \exists k\in\mathbb{Z},\quad x=y+k\alpha$.

Définition 3 – Propriétés éventuelles d'une relation binaire

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

- La relation $\mathcal{R}$ est dite *réflexive* lorsque : $\quad \forall x\in E,\quad x\mathcal{R}x$.
- La relation $\mathcal{R}$ est dite *transitive* lorsque : $\quad \forall x,y,z\in E,\quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$.
- La relation $\mathcal{R}$ est dite *symétrique* lorsque : $\quad \forall x,y\in E,\quad x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$.
- La relation $\mathcal{R}$ est dite *antisymétrique* lorsque : $\quad \forall x,y\in E,\quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x=y$.

Exemple 4

- La relation $=$ d'égalité sur E est réflexive, transitive, symétrique et antisymétrique.
- La relation $\neq$ de « non égalité » sur E est symétrique, mais n'est ni réflexive, ni transitive, ni antisymétrique.
- Les relations $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont réflexives, transitives et antisymétriques. En revanche, elles ne sont pas symétriques, *e.g.* $\quad 1\leqslant 2$, mais $2\nleqslant 1 \quad$ et $\quad (x\longmapsto 1)\leqslant(x\longmapsto 2)$, mais $(x\longmapsto 2)\nleqslant(x\longmapsto 1)$.
- La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est transitive et antisymétrique, mais elle n'est ni réflexive, ni symétrique.

- La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$ est réflexive, transitive et antisymétrique.
- La relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{Z}$ est réflexive et transitive, mais elle n'est pas antisymétrique, *e.g.* $-2 \mid 2$ et $2 \mid -2$, mais $-2 \neq 2$.
- La relation de congruence modulo α sur $\mathbb{R}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, est réflexive, transitive et symétrique.
- La relation « avoir même signe » sur $\mathbb{R}^*$ est réflexive, transitive et symétrique.

2 Relations d'équivalence

Définition 5 – Relation d'équivalence

On appelle *relation d'équivalence sur E* toute relation binaire sur E qui est à la fois réflexive, transitive et symétrique.

Exemple 6 La relation d'égalité sur E, la relation de congruence modulo α sur $\mathbb{R}$ et la relation « avoir même signe » sur $\mathbb{R}^*$ sont des relations d'équivalence (cf. exemple 4).

Définition 7 – Classes d'équivalence d'une relation d'équivalence, ensemble quotient

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

- Pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{y \in E \mid y \sim x\}$ des éléments de E en relation avec x est appelé la *classe d'équivalence de x (pour $\sim$)*, notée $cl(x)$.
- **(HP)** L'ensemble des classes d'équivalence de E pour $\sim$ est appelé l'*ensemble quotient de E par $\sim$* et souvent noté $E/\sim$. C'est un sous-ensemble de $\mathscr{P}(E)$.

Théorème 8 – Propriétés des classes d'équivalence

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

- **Lien entre classes.** Pour tous $x, y \in E$, $cl(x) = cl(y)$ si et seulement si $x \sim y$.
  En particulier, si $y \in cl(x)$, alors $cl(y) = cl(x)$.
- **Partition de E.** Les classes d'équivalence pour $\sim$ forment une partition de E.

Démonstration. ... ∎

Remarque 9

- Réciproquement, la donnée d'une partition de E définit une relation d'équivalence sur E, deux éléments étant en relation lorsqu'ils appartiennent à la même part.

  En effet, si $\{A_i\}_{i \in I}$ est une partition de E, on définit une relation d'équivalence $\sim$ sur E par : pour tous $x, y \in E$
  $$x \sim y \iff (\exists i \in I, \quad x, y \in A_i).$$
- Une relation d'équivalence peut donc être représentée comme une carte au sens géographique. Chaque classe d'équivalence est tel un pays à l'intérieur de E dont les éléments sont caractérisés par une certaine nationalité. Le monde de l'ensemble E se trouve ainsi partitionné en pays.
- La notion (hors programme) d'ensemble quotient est fondamentale en mathématiques. Elle permet notamment de donner des constructions successives des ensembles usuels de nombres $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{N}$ (cf. exercice 2).

Exemple 10 La relation « avoir même signe » sur $\mathbb{R}^*$ possède deux classes d'équivalence, la classe $\mathbb{R}_+^*$ et la classe $\mathbb{R}_-^*$. L'ensemble quotient associé est donc la paire d'ensembles $\{\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*\}$.

Exemple 11 Soit $\alpha > 0$. Les classes d'équivalence de $\mathbb{R}$ pour la relation de congruence modulo α sont exactement les ensembles $x + \alpha\mathbb{Z}$, x parcourant $[0, \alpha[$. L'ensemble quotient associé est ainsi $\{x + \alpha\mathbb{Z} \mid x \in [0, \alpha[\}$ (qui s'identifie naturellement à $[0, \alpha[$ via la bijection $x \longmapsto x + \alpha\mathbb{Z}$).

En effet, il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème de division euclidienne dans $\mathbb{R}$ (cf. exemple 41 du chapitre 9).

3 Relations d'ordre

3.1 Définition

Définition 12 – Relation d'ordre, ensemble ordonné, éléments comparables, ordre total/partiel

- **Relation d'ordre, ensemble ordonné.** On appelle *(relation d') ordre sur E* toute relation binaire sur E qui est à la fois réflexive, transitive et antisymétrique. Un ensemble muni d'un ordre est dit *ordonné*.

Soit $\leqslant$ une relation d'ordre sur E.

- **Éléments comparables.** Deux éléments x et y de E sont dits *comparables (par $\leqslant$)* lorsque $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.
- **Ordre total/partiel.** La relation d'ordre $\leqslant$ est dite *totale* lorsque deux éléments quelconques de E sont toujours comparables par $\leqslant$, *i.e.* lorsque
$$\forall x, y \in E, \quad x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x.$$
Une relation non totale est dite *partielle*.

Exemple 13 D'après les résultats mentionnés à l'exemple 4 :

- Les relations $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont des relations d'ordre.
Totale sur $\mathbb{R}$ et partielle sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, *e.g.* sin et cos ne sont pas comparables ($\sin \nleqslant \cos$ et $\cos \nleqslant \sin$).
- La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$ est une relation d'ordre, partielle dès que E contient au moins deux éléments. En effet, si a et b sont deux éléments DISTINCTS de E, alors $\{a\} \not\subset \{b\}$ et $\{b\} \not\subset \{a\}$.

Exemple 14 La relation de divisibilité $|$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$, mais est un ordre (partiel) sur $\mathbb{N}$.

✖ **ATTENTION !** ✖ Puisqu'une relation d'ordre n'est pas totale a priori, pour montrer que $x \leqslant y$ pour certains $x, y \in E$, il n'est pas possible de raisonner par l'absurde en supposant $y < x$. En effet, aucune de ces deux relations ne pourraient être vraie (cela arrive lorsque x et y sont non comparables).

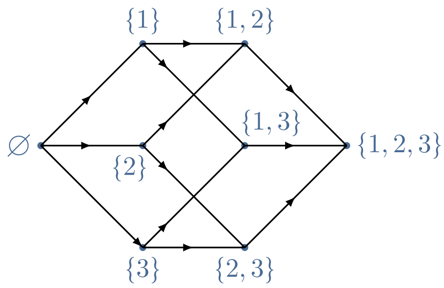
Remarque 15

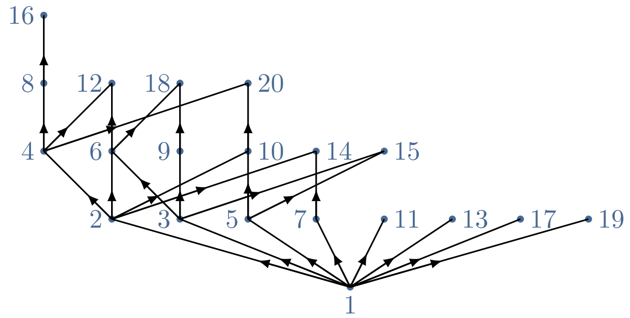
- Qu'attendons-nous intuitivement des notions de classement, hiérarchie, ordre, préférence ?
  - × Essentiellement la transitivité en pratique ! En effet, si A est plus grand que B et B plus grand que C, alors A est plus grand que C. Toute entorse à la transitivité contredit l'idée de hiérarchie.
  - × La réflexivité est imposée dans les relations d'ordre, mais aurait pu ne pas l'être. Les mathématiques ont simplement privilégié les relations du type « inférieur OU ÉGAL ».
  - × L'antisymétrie est un autre choix conventionnel. La relation « être plus âgé (ou du même âge) » sur l'ensemble des être humain est transitive et réflexive, mais non antisymétrique car deux individus distincts peuvent être né au même instant. Bien que non antisymétrique, cette relation n'en est pas moins conçue intuitivement comme une relation de hiérarchie.

  Retenons que les relations d'ordre sont des exemples importants de hiérarchies – au sens large (réflexivité) et sans ambiguïté (antisymétrie) – mais qu'elles ne formalisent pas toutes les hiérarchies concevables.
- Il est d'usage pour une relation $\leqslant$ de lire la relation $x \leqslant y$ ainsi : « x est plus petit que y ». Naturellement, rien ne s'oppose à dire plutôt « x est plus grand que y », cela est purement conventionnel et il s'agit seulement d'être cohérent.
- Enfin, observons que LES RELATIONS D'ORDRE EXCLUENT LES BOUCLES. Ainsi, il n'est pas possible d'avoir une boucle de la forme $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_1$ dans laquelle les éléments sont distincts et $n \geqslant 2$, car la transitivité et l'antisymétrie de $\leqslant$ impliqueraient l'égalité $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.
Sans boucles, LES RELATIONS D'ORDRE ONT COMME UNE ORIENTATION NATURELLE, en les parcourant on va toujours de l'avant, on ne revient jamais en arrière et on ne tourne jamais en rond. C'est précisément cette orientation qui nous invite à considérer que certains éléments sont plus petits/grands que d'autres.

La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre TOTALE. Pour cette raison, il est possible de la représenter sous la forme d'une ligne unique, une fibre unique orientée contenant tous les réels.

Ci-dessous, la figure de gauche représente la relation $\subset$ sur $\mathscr{P}(\{1,2,3\})$, tandis qu'on a représenté à droite la relation de divisibilité $|$ sur $[\![1\,,20]\!]$. On visualise alors clairement que ces relations ne sont pas totales ; il ne suffit pas D'UNE fibre pour représenter ces relations, il en faut plusieurs.





Définition-théorème 16 – Ordre strict associé à une relation d'ordre

Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E. La relation $\prec$ sur E définie, pour tous $x, y \in E$, par

$$x \prec y \quad \Longleftrightarrow \quad x \preccurlyeq y \ \text{ et } \ x \neq y$$

est transitive et antisymétrique, et appelée l'*ordre strict associé à* $\preccurlyeq$.

Démonstration. Cf. exercice 7. ■

Exemple 17 Naturellement, la relation usuelle $<$ sur $\mathbb{R}$ est la relation d'ordre strict associée à la relation $\leqslant$.

3.2 Éléments remarquables d'un ensemble ordonné

Ce paragraphe généralise pour un ensemble ordonné quelconque les notions de majorants/minorants, maximum/minimum, borne supérieure/inférieure introduites au chapitre 9 pour la relation d'ordre usuelle $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 18 – Majorant/minorant

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

- La partie A est dite *majorée (pour $\preccurlyeq$)* lorsque : $\exists M \in E, \quad \forall a \in A, \quad a \preccurlyeq M$.
  Un tel M est appelé UN *majorant* de A. On dit aussi que A *est majorée par* M ou encore que M *majore* A.
- La partie A est dite *minorée (pour $\preccurlyeq$)* lorsqu'il existe $m \in E$ tel que : $\exists m \in E, \quad \forall a \in A, \quad m \preccurlyeq a$.
  Un tel m est appelé UN *minorant* de A. On dit aussi que A *est minorée par* m ou encore que m *minore* A.
- La partie A est dite *bornée (pour $\preccurlyeq$)* lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple 19

- L'ensemble $\{8, 10, 12\}$ est minoré par 2 et majoré par 120 pour la relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$.
  En pratique, 2 s'obtient comme le PGCD de 8, 10 et 12, et 120 comme leur PPCM (cf. chapitre 13).
- $\mathscr{P}(E)$ est minoré par $\varnothing$ et majoré par E pour la relation d'inclusion.

✖ **ATTENTION !** ✖ On ne parle jamais « du » majorant d'une partie majorée A d'un ensemble ordonné, mais toujours d'UN majorant, dans la mesure où une telle partie en possède a priori plusieurs. En effet, si M est un majorant de A, alors tout élément plus grand que M en est aussi un a fortiori. Il en va évidemment de même pour les minorants.

Définition-théorème 20 – Plus grand/petit élément, maximum/minimum

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

- On appelle *plus grand élément de A* ou *maximum de A* tout élément DE A qui majore A. S'IL EN EXISTE UN, un tel plus grand élément est unique et donc appelé LE plus grand élément de A, noté $\max A$.
- On appelle *plus petit élément de A* ou *minimum de A* tout élément DE A qui minore A. S'IL EN EXISTE UN, un tel plus petit élément est unique et donc appelé LE plus petit élément de A, noté $\min A$.

Démonstration. Supposons que M et M' sont deux maximums de la partie A. Puisque $M \in A$, $M \preccurlyeq M'$ et, puisque $M' \in A$, $M' \preccurlyeq M$. Par conséquent, $M = M'$, par antisymétrie de $\preccurlyeq$. ∎

✖ **ATTENTION !** ✖ Le plus grand/petit élément est unique... S'IL EXISTE !

Exemple 21 On munit $\mathscr{P}(E)$ de la relation d'inclusion $\subset$ et on suppose que E possède au moins deux éléments. L'ensemble des singletons de E ne possède alors pas de plus grand élément.

En effet, par l'absurde, si l'ensemble des singletons de E possédait un plus grand élément $\{e\}$, alors, pour tout $x \in E$, on aurait $\{x\} \subset \{e\}$, soit $x = e$ et donc $E = \{e\}$ – contradiction !

Exemple 22 On munit $\mathbb{N}$ de la relation $|$ de divisibilité.

(i) L'ensemble $\{2, 3, 6\}$ possède un plus grand élément, à savoir 6, mais pas de plus petit élément.

(ii) 0 est le plus grand élément de $\mathbb{N}$ et 1 son plus petit élément.

(iii) L'ensemble $\mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ ne possède ni plus petit élément, ni plus grand élément.

Définition 23 – Borne supérieure/inférieure

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

- S'IL EXISTE, le plus petit majorant de A pour $\preccurlyeq$ est appelé LA *borne supérieure de A (pour $\preccurlyeq$)* et noté $\sup A$.
- S'IL EXISTE, le plus grand minorant de A pour $\preccurlyeq$ est appelé LA *borne inférieure de A (pour $\preccurlyeq$)* et noté $\inf A$.

La différence essentielle entre plus grand élément et borne supérieure réside dans le fait que la borne supérieure, lorsqu'elle existe, n'appartient pas nécessairement à la partie considérée.

Comme l'indique la définition, la borne supérieure n'existe pas toujours, mais le cas échéant elle est unique en tant que plus petit élément ; raison pour laquelle il est légitime de parler de LA borne supérieure.

Remarque 24 Par définition, une condition nécessaire pour qu'une partie A de E possède une borne supérieure (resp. inférieure) est qu'elle soit majorée (resp. minorée).

Théorème 25 – Lien entre plus grand/petit élément et borne supérieure/inférieure

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, A une partie de E et $a \in E$. On dispose des équivalences suivantes

(i) $a = \max A \iff (a \in A \text{ et } a = \sup A)$; **(ii)** $a = \min A \iff (a \in A \text{ et } a = \inf A)$.

En particulier, si A possède un plus grand (resp. petit) élément, alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et

$$\sup A = \max A \qquad (\text{resp. } \inf A = \min A).$$

Démonstration. Identique à celle donnée pour le théorème 10 du chapitre 9. ∎

Dire qu'un élément s est le plus petit des majorants de A consiste à dire qu'il est un majorant de A et que tout autre majorant de A LUI EST COMPARABLE et est plus grand. S'il existe un majorant de A non comparable à s, s ne saurait être la borne supérieure. Notamment, s'il existe un majorant de A non comparable à tous les autres majorants de A, alors A ne possède pas de borne supérieure. On note ici une petite subtilité comparativement à la situation usuelle de l'ensemble totalement ordonné $(\mathbb{R}, \leqslant)$.

✎ **En pratique** ✎ **Démontrer qu'un nombre est la borne supérieure/inférieure.**

Pour établir que $s = \sup A$, on raisonne souvent ainsi

(i) On montre que s est un majorant de A.

(ii) On montre que c'est le plus petit, *i.e.* si M est un majorant de A, alors $s \preccurlyeq M$. Rappelons que si $s \in A$, alors $s = \max A$ (théorème 25) et a fortiori $s = \sup A$.

On procède bien sûr similairement pour une borne inférieure.

Exercice 26 Dans $\mathbb{N}^*$ muni de la relation $|$ de divisibilité, nous montrerons au chapitre 13 que

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, \quad \inf\{a, b\} = \operatorname{pgcd}(a, b) \quad \text{et} \quad \sup\{a, b\} = \operatorname{ppcm}(a, b).$$

Exemple 27 Toute partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(E)$ admet une borne supérieure et une borne inférieure au sens de l'inclusion $\subset$, en l'occurrence : $\quad \sup \mathscr{A} = \bigcup_{X \in \mathscr{A}} X \quad$ et $\quad \inf \mathscr{A} = \bigcap_{X \in \mathscr{A}} X$.

En effet, contentons-nous du cas de la borne supérieure et déterminons les majorants de $\mathscr{A}$. Pour tout $M \in \mathscr{P}(E)$, on dispose des équivalences

$$M \text{ majore } \mathscr{A} \iff \forall X \in \mathscr{A}, \quad X \subset M \iff \bigcup_{X \in \mathscr{A}} X \subset M.$$

Autrement dit, $\bigcup_{X \in \mathscr{A}} X$ est un majorant de $\mathscr{A}$ (implication réciproque) et il s'agit du plus petit (implication directe), d'où la conclusion.

Théorème 28 – Opérations sur les bornes supérieures

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, ainsi que A et B deux parties de E. On suppose que A et B possèdent chacune une borne supérieure.

(i) Si $A \subset B$, alors $\sup A \preccurlyeq \sup B$.

(ii) Si $\sup A$ et $\sup B$ sont comparables, alors l'ensemble $A \cup B$ possède une borne supérieure et on a

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

On dispose naturellement de résultats analogues pour les bornes inférieures.

Démonstration. ... ■

3.3 Ensembles ordonnés et monotonie

La notion d'ordre permet de généraliser celle de fonction monotone entre deux ensembles ordonnés.

Définition 29 – Application monotone

Soit $(E, \preccurlyeq_E)$ et $(F, \preccurlyeq_F)$ deux ensembles ordonnés. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite

- *croissante* lorsqu'elle vérifie $\quad \forall (x, y) \in E^2, \quad x \preccurlyeq_E y \implies f(x) \preccurlyeq_F f(y)$;
- *décroissante* lorsqu'elle vérifie $\quad \forall (x, y) \in E^2, \quad x \preccurlyeq_E y \implies f(y) \preccurlyeq_F f(x)$.

Exemple 30 Le passage au complémentaire $A \longmapsto \overline{A}$ est une involution décroissante de l'ensemble ordonné $(\mathscr{P}(E), \subset)$.

✖ Attention ! ✖ Les propriétés usuelles des fonctions réelles monotones ne se généralisent pas a priori. Par exemple, étant donné un ensemble fini E, l'application de $(\mathscr{P}(E), \subset)$ dans $(\mathbb{N}, \leqslant)$ définie par $X \longmapsto \operatorname{Card} X$ est strictement croissante mais non injective !

Compétences à acquérir

- Vérifier qu'une relation binaire est une relation d'équivalence/d'ordre
- Étudier les éléments remarquables (borne inférieure/supérieure, maximum, minimum, ...) d'un ensemble ordonné.

Quelques résultats classiques :

- Connaître les relations d'équivalence usuelles : relation d'égalité, relations de congruence sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}$, relation « avoir même signe » sur $\mathbb{R}$.
- Connaître les ensembles ordonnés usuels : $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \leqslant\right)$, $(\mathscr{P}(E), \subset)$ et $(\mathbb{N}, |)$.
- Relation de congruence sur $\mathbb{Z}$ et description de l'ensemble quotient qui en découle (exercice 3).
- Lien entre ordre strict et ordre large (exercice 7).
- Ordre produit et ordre lexicographique associés à une relation d'ordre (exercice 8).